TG2 polynomy 1

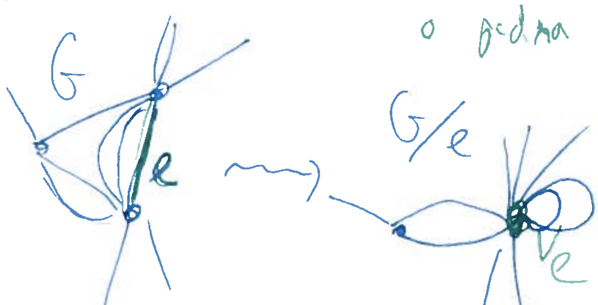
GRAFOVÉ POLYNOMY

$\pi_G(k)$ = # dobrých obarvení G k barvami (NP-těžké spočíst)

rekurentní vzorec $G=(V,E)$ ... funguje pro multigrafy: (G může mít smyčky a paralelní hrany)

- pokud $E=\emptyset \Rightarrow k^{|V|}$
- $e\in E$ lib. hrana
  - a) e je smyčka $\Rightarrow \pi_G(k)=0$
  - b) jinak $\pi_G(k)=\pi_{G-e}(k)-\pi_{G/e}(k)$

kontrakce: # hran se sníží o jedna



(e smyčka $\Rightarrow G/e = G-e$)

$G-e$ a G/e mají o 1 hranu méně

☉ c = k-obarvení $G-e$

↳ c je buď obarvení G, nebo obarvení G/e, a naopak z obarvení G či G/e dávají obarvení $G-e$

☉ $\pi_G(k)$ je polynom proměnné k stupně $|V|$

☉ $\pi_G(k)$ je jednoznačně určený hodnoty v bodech $k=1,2,\dots,|V|,|V|+1$ dané

↳ $\pi_G(k)$ = <u>chromatický polynom</u> ($d+1$ bodů určuje polynom stupně d)

Př. dalšího grafového polynomu: G souvislý (↳ slf), $p\in[0,1)$ - pravděpodobnost selhání lib. hrany (hrany nezávislé) ⇝ $G(p)$ ← náhodný podgraf

$R_G(p)=\Pr[G(p)\text{ souvislý}]$ ... polynom spolehlivosti

- $|V(G)|=1 \Rightarrow R_G(p)=1$
- $e\in E$ lib.
  - e smyčka: $R_G(p)=R_{G-e}(p)$
  - e most: $R_G(p)=\underbrace{(1-p)}_{e\text{ nesmí selhat}}\cdot R_{G/e}(p)$ ... pokud e neselže, můžeme e zkontrahovat
  - jinak: $R_G(p)=p\cdot R_{G-e}(p)+(1-p)\cdot R_{G/e}(p)$

G2 polynomy 2/ ☺ $R_G(p)$ je polynom stupně $\le |E|$

Tutteův polynom

pro $F \subseteq E$ definujeme:

- $k_G(F) = \#$ komponent (V, F)
- hodnost (rank) $r_G(F) = |V| - k(F) = \sum$ velikostí koster pro komponenty (V, F)
- nulita $n_G(F) = |F| - r_G(F) = \max |F'|$ t.ž. $k(F') = k(F)$ … $n(F) = \#$ hran mimo kostru

matice incidence pro F: $A_F \in \{0,1,2\}^{V \times F}$

$$A_F = \begin{array}{c|cccc} & & e & & \\ \hline V & \begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix} & \cdots & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \end{array}$$

$\uparrow$ smyčka

$r(F) = \operatorname{rank}(A_F)$ nad $\mathbb{Z}_2$

$n(F) = \dim \operatorname{Ker}(A_F)$ nad $\mathbb{Z}_2$

$\Rightarrow r(F) + n(F) = |F|$

def: $$T_G(x, y) = \sum_{F \subseteq E} (x-1)^{r(E) - r(F)} (y-1)^{n(F)}$$ (proměnné x, y)

př: $T_{\triangle}(x,y) = (x-1)^{2-2}(y-1)^1 + 3\cdot(x-1)^{2-2}\cdot(y-1)^0 + 3\cdot(x-1)^{2-1}\cdot(y-1)^0 + (x-1)^2\cdot(y-1)^0 =$

$= y - 1 + 3 + 3x - 3 + (x-1)^2 = x^2 + x + y$

$F \subseteq \triangle$	r	n
$\triangle$	2	1
$3\times$	2	0
$3\times$	1	0
	0	0

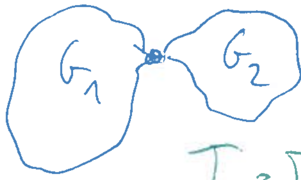
☺ $T_G(1,1) = \#$ koster G … $0^0 = 1$ … $\forall x \in \mathbb{R}: x^0 = 1$, $\forall y \in \mathbb{R}\setminus\{0\}: 0^y = 0$

(F kostra $\Rightarrow$ $r(E) = r(F)$ $\Leftarrow$ & $n(F) = 0$)

JG2 polynomy 3/

Tvrzení: Nechť $G_1=(V_1,E_1)$ a $G_2=(V_2,E_2)$ multigrafy splňují $|V_1\cap V_2|\le 1$ a $E_1\cap E_2=\emptyset$. Pak pro $G=(V_1\cup V_2, E_1\cup E_2)$ platí $T_G = T_{G_1}\cdot T_{G_2}$

multiplikativita T_G



$T_G = T_G(x,y)$

Dk.: $$T_G = \sum_{F\subseteq E} \dots = \underbrace{\sum_{F_1\subseteq E_1}\sum_{F_2\subseteq E_2}}_{F=F_1\cup F_2} (x-1)^{r(E_1)+r(E_2)-r(F_1)-r(F_2)} \cdot (y-1)^{n(F_1)+n(F_2)} =$$

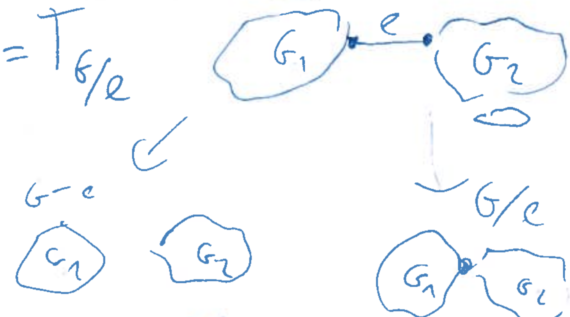
(T_G je tedy součinem bloků vrcholové 2-souvislosti)

$$|V_1\cap V_2|\le 1 \ \& \ E_1\cap E_2=\emptyset \Rightarrow \begin{aligned} r(F_1\cup F_2) &= r(F_1)+r(F_2)\\ r(E_1\cup E_2) &= r(E_1)+r(E_2)\\ n(F_1\cup F_2) &= n(F_1)+n(F_2)\end{aligned}$$

$$= \sum_{F_1\subseteq E_1}\sum_{F_2\subseteq E_2} \underbrace{(x-1)^{r(E_1)-r(F_1)}\cdot(y-1)^{n(F_1)}}_{T_{G_1}} \cdot \underbrace{(x-1)^{r(E_2)-r(F_2)}\cdot(y-1)^{n(F_2)}}_{T_{G_2}}$$ ∎

Důsledek: e most $\Rightarrow T_{G-e} = T_{G/e}$

(pro smyčku: $G-e = G/e$ //)



$T_G = T_{G_1}\cdot T_{G_2}$ v obou případech

KG2 polynomy 4/

Věta: $G=(V,E)$ multigraf

1) $E=\emptyset \Rightarrow T_G(x,y)=1$ ... $\left(T_G=\sum_{F\subseteq\emptyset} \dots = (x-1)^0\cdot(y-1)^0\right)$

2) zvolme lib. $e\in E$: a) e smyčka $\Rightarrow T_G(x,y)=y\cdot T_{G-e}(x,y)=y\cdot T_{G/e}$

b) e most $\Rightarrow T_G(x,y)=x\cdot T_{G-e}(x,y)=x\cdot T_{G/e}$

c) jinak: $T_G=T_{G-e}+T_{G/e}$

Důkaz: 1) ✓

2) $T_G=\underbrace{\sum_{\substack{F\subseteq E\\ e\in F}}\dots}_{S_e}+\underbrace{\sum_{\substack{F\subseteq E\\ e\notin F}}\dots}_{S_{\neg e}}$

$S_{\neg e}=\sum_{\substack{F\subseteq E\\ e\notin F}}(x-1)^{r(E)-r(F)}\cdot(y-1)^{n(F)}$

$T_{G-e}=\sum_{F\subseteq E\setminus\{e\}}(x-1)^{r(E\setminus\{e\})-r(F)}(y-1)^{n(F)}$

e není most $\Rightarrow r(E)=r(E\setminus\{e\}) \Rightarrow S_{\neg e}=T_{G-e}$

e je most $\Rightarrow r(E)=r(E\setminus\{e\})+1 \Rightarrow S_{\neg e}=(x-1)\cdot T_{G-e}$

$S_e=\sum_{\substack{F\subseteq E\\ e\in E}}(x-1)^{r_G(E)-r_G(F)}\cdot(y-1)^{n_G(F)}$

$T_{G/e}=\sum_{F'\subseteq E\setminus\{e\}}(x-1)^{r_{G/e}(E\setminus\{e\})-r_{G/e}(F')}(y-1)^{n_{G/e}(F')}$ $F'=F\setminus\{e\}$

$r(F)=r_{G/e}(F')+\begin{cases}1 & \dots e \text{ není smyčka}\\ 0 & \dots e \text{ je smyčka}\end{cases}$

$r(E)=r_{G/e}(E\setminus\{e\})+$ —''—

$n_G(F)=n_{G/e}(F')+\begin{cases}1 & \dots e \text{ je smyčka}\\ 0 & \dots e \text{ není smyčka}\end{cases}$

exponent $(x-1)$ stejný

$\Rightarrow$ e je smyčka $\Rightarrow S_e=(y-1)\cdot T_{G/e}=(y-1)T_{G-e}$

e není —''— $\Rightarrow S_e=T_{G/e}$

KG2 polynomy 5/

$$T_G = S_e + S_{\neg e} = \begin{cases} e \text{ je most } \dots = T_{G/e} + (x-1)\cdot T_{G-e} = x\cdot T_{G/e} \\ e \text{ je smyčka } \dots = (y-1)\cdot T_{G/e} + T_{G-e} = y\cdot T_{G-e} \\ \text{jinak: } \dots = T_{G/e} + T_{G-e} \end{cases}$$

□

Tvrzení: $\forall$ multigraf G: $\underbrace{\pi_G(c) = (-1)^{r(E)} \cdot c^{k(E)} \cdot T_G(1-c, 0)}_{= P(c)}$

(lze ověřit přes rekurence z předchozí věty)

Dk: přes princip inkluze-exkluze (PIE)

$$P(c) = \sum_{F\subseteq E} \cancel{(-1)^{r(E)}} \cdot (\underbrace{-c}_{x-1})^{r(E)-r(F)} \cdot c^{k(E)} \cdot (\underbrace{-1}_{y-1})^{n(F)} =$$

$r(E)-r(F)$: $k(F)-|V|$; $n(F)$: $|F|-r(F)$

$$= \sum_{F\subseteq E} (-1)^{|F|} \cdot c^{k(F)}$$

① G obsahuje smyčku e ... spárujeme F t.ž. $e\notin F$ a $F\cup\{e\}$

$k(F) = k(F\cup\{e\})$

$|F| = |F\cup\{e\}| - 1$

$\Downarrow$

$P(c) = 0 = \pi_G(c)$

jinak ∄ smyčka: $\mathcal{F}$ = množina fcí $f: V\to\{1,2,\dots c\}$ ... $|\mathcal{F}| = c^{|V|}$

pro $e\in E$: $\varphi_e = \{f\in\mathcal{F}: f(x)=f(y)\}$

$\mathcal{D}$ = dobrá obarvení f ... $\forall e\in E: f\notin\varphi_e$

$$\pi_G(c) = |\mathcal{D}| = |\mathcal{F}| - \left|\bigcup_{e\in E}\varphi_e\right|$$

$$\left|\bigcup_{e\in E}\varphi_e\right| \overset{PIE}{=} \sum_{\substack{F\subseteq E\\ F\neq\emptyset}} (-1)^{|F|+1} \left|\bigcap_{e\in F}\varphi_e\right|$$

⊙ $\left|\bigcap_{e\in F}\varphi_e\right| = c^{k(F)}$

G

$|\mathcal{F}| = c^{|V|} = (-1)^{|\emptyset|}\cdot$

□