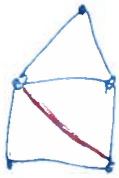
KG2 chordální 1

def.: G je chordální, pokud neobsahuje kružnici délky ≥ 4 jako indukovaný podgraf. ($\Rightarrow \forall$ kr-ce má tětivu=chordu)
(větší omezení než ze silné věty o perf. grafech)

neobsahuje díru ani antidíru ($\overline{C_k}$ pro $k \geq 5$)

př.: K_n, stromy, lesy,

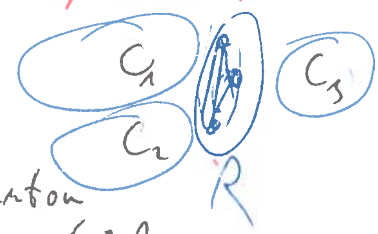


intervalové grafy

👁 G chordální, $H \leq_i G \Rightarrow H$ chordální

Lemma: Nechť G je souvislý a chordální. Pak lib. minimální řez R v G indukuje kliku.

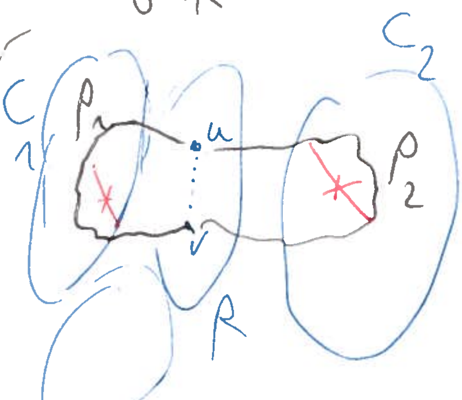
Dk.: sporem $u, v \in R$: $uv \notin E$



👁 R minimální $\Rightarrow u, v$ sousedí s $\forall$ komponentou $G \setminus R$

↳ P_1 = nejkratší cesta z u do v používající jen vrcholy z $C_1 \cup \{u, v\}$

P_2 = — " — $C_2 \cup \{u, v\}$



👁 P_1 i P_2 mají ≥ 2 hrany a jsou indukované cesty
↳ $P_1 \cup P_2$ je indukovaná kr-ce délky ≥ 4 ↯ □

Důsledek: chordální grafy jsou perfektní
↳ náznak důkazu: indukcí obarvíme G ω barvami
↳ pro $G \neq K_n$ najdeme min. řez a použijeme I.P.

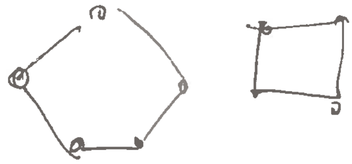
KG 2 chordální 2

def: vrchol v je <u>simpliciální</u>, pokud sousedé v tvoří kliku

Věta: G chordální $\Leftrightarrow \forall H \preceq_i G$: graf H obsahuje simpliciální vrchol

Dk.:

$\Leftarrow$ obměnou: indukovaná kružnice nemá simpliciální vrchol



$\Rightarrow$ <u>indukcí</u> dokážeme: G chordální $\Rightarrow G \cong K_n$, nebo obsahuje ≥ 2 nesousední simpliciální vrcholy

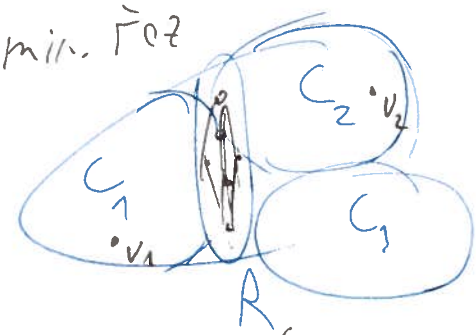
↳ dle # vrcholů

G klika ✓ (lib. vrchol simpliciální)

$|V(G)| = 1$

$|V(G)| > 1$ & $G \not\cong K_n$ ... R = min. řez

Lemma $\Rightarrow R$ klika



$G_1 = G[C_1 \cup R]$

$G_2 = G[C_2 \cup \dots C_\ell \cup R]$

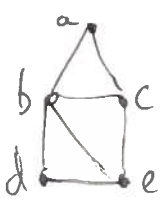
I.P. $\Rightarrow$ G_1 i G_2 obsahují simpliciální vrcholy v_1 a v_2, kt. nejsou v R

(G_1 je klika $\Rightarrow$ lib. vrchol C_1 je simpl. jinak $\exists$ 2 <u>nesousední</u> $\Rightarrow$ $\Rightarrow \geq 1$ mimo kliku R)

$\Rightarrow$ v_1, v_2 nesousední

def: Perfektní eliminační schéma (PES) grafu G je uspořádání vrcholů $v_1, \dots, v_n$ t.ž.

$\forall i = 1 \dots n$: $\underbrace{N(v_i)}_{\text{sousedé } v_i} \cap \{v_1, \dots, v_{i-1}\}$ tvoří kliku



$\rightarrow$ e – d – b – c – a

KG2 chordální 3

Důsledek: G chordální $\Leftrightarrow$ pro G $\exists$ P.E.S.

(dk.: $\Rightarrow$ PES: obrácené pořadí odebírání simpliciálních vrcholů

$\Leftarrow$ pokud by $\exists$ indukovaná C_k pro $k \geq 4$, tak poslední vrchol C_k v PES nesplňuje podmínku v def. PES $\square$

$\Rightarrow$ chordálnost grafu lze otestovat v polyg. čase

+ lze spočíst $\chi(G) = \omega(G)$ v poly. čase

$$D = \max_i \underset{v_i}{1} + |N(v_i) \cap \{v_1, \dots, v_{i-1}\}|$$

$\omega(G) \geq D$

$\chi(G) \leq D$ .. hladové barvení

$\Rightarrow \chi(G) = \omega(G) = D$

$\Rightarrow$ Chordální grafy jsou perfektní (přes uzavřenost na indukované podgrafy)