KG2 perfektní 1

zpět k vrcholové barevnosti

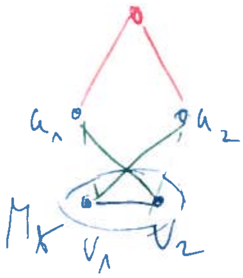
$\omega(G) \leq \chi(G) \leq \Delta(G)+1$

$\exists$ grafy s $\omega(G)=2$ ($\Leftrightarrow$ bez $\triangle$) a $\chi(G)$ lib. velkým

Mycielskiho grafy $\{M_k\}_{k\geq 2}^{\infty}$

$M_2 = K_2$

konstrukce $M_k \to M_{k+1}$



$v_1 \dots v_n$ = vrcholy M_k

$\underbrace{u_1 \dots u_n}_{\text{nezávislá množina}}$, w nové vrcholy

$\forall i,j: u_i v_j \in E(M_{k+1}) \Leftrightarrow v_i v_j \in E(M_k)$

$(u_i v_i \notin E(M_{k+1}))$

$\forall i: u_i w \in E(M_{k+1})$

M_{k+1} neobsahuje $\triangle$ ($\Leftrightarrow \omega(M_{k+1})=2$)

vsuvka: $\forall n,k,l > 0$
$\exists G: |V(G)| \geq n$
$\chi(G) \geq k$
a nejkratší krce má délku $\geq l$

$\chi(M_{k+1}) \geq k+1$ (platí $=$)

indukcí: $\chi(M_2)=2$

indukční krok Sporem: nechť máme $c = k$-obarvení M_{k+1}

BÚNO $c(w) = k$

$\Rightarrow u_1 \dots u_n$ obarveny $1 \dots k-1$

barva k tvoří nezávislou množinu ve $v_1 \dots v_n$

↳ tyto vrcholy přebarvíme: pokud $c(v_i)=k$, pak nastavíme $c'(v_i) \leftarrow c(u_i)$

jinak $c'(v_i) \leftarrow c(v_i)$

je to $(k-1)$-obarvení $M_k \Rightarrow$ ↯ s I.P.

pokud by $\exists$ špatně obarvená hrana $v_i v_j$

pak ! 1 vrchol v_i měl původně barvu k

ale $u_i v_j \in E(M_{k+1})$ a $c'(v_i) = c(u_i) \neq c(v_j) = c'(v_j)$

~~G2 perfektní ?~~

Jaké grafy mají $\omega(G)=\chi(G)$? – nezajímavé, stačí k lib. grafu přidat $K_{\chi(G)}$

def.: Graf G je perfektní, pokud pro $\forall$ indukovaný podgraf H grafu G platí: $\omega(H)=\chi(H)$

[Berge '61]

(značení: $H \trianglelefteq_i G$) (spec.: $\omega(G)=\chi(G)$)

př.: bipartitní grafy jsou perfektní, K_n, $\overline{K_n}$

– mnohé NP-těžké výpočetní problémy lze vyřešit v polyn. čase na perfektních grafech

G perfektní a $H \trianglelefteq_i G \Rightarrow H$ perfektní

př.: „neperfektní" grafy: $\forall C_{2k+1}$ (pro $k\geq 2$)

$\overline{C_5}=C_5$

def.: doplněk G je graf $\overline{G}$ t.ž.

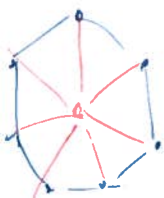
$V(\overline{G})=V(G)$ &

$E(\overline{G})=\binom{V(G)}{2}\setminus E(G)$

$\alpha(\overline{G})=\omega(G)$

$\omega(\overline{G})=\alpha(G)$

kolo



pro $k\geq 2$: $\overline{C_{2k+1}}$ platí: $\omega(\overline{C_{2k+1}})=k$

$\chi(\overline{C_{2k+1}})=k+1$

$\overline{C_7}$ ... $\omega(\overline{C_7})=3$

$\alpha(\overline{C_7})=\omega(C_7)=2$

$\Rightarrow \chi(\overline{C_7})\geq\left\lceil \frac{7}{2}\right\rceil=4$

lichá díra = C_{2k+1} jako indukovaný podgraf

lichá antidíra = $\overline{C_{2k+1}}$ — " —

[Chudnovsky, Robertson, Seymour, Thomas '06]

Silná věta o perfektních grafech: G je perfektní $\Leftrightarrow$ neobsahuje lichou díru či lichou antidíru jako indukovaný podgraf

KG2 perfektní 3/

Slabá věta o perfektních grafech: [Lovász '72]

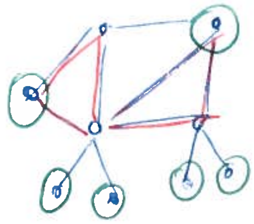
(důsledek silné)

G perfektní $\Leftrightarrow \overline{G}$ perfektní

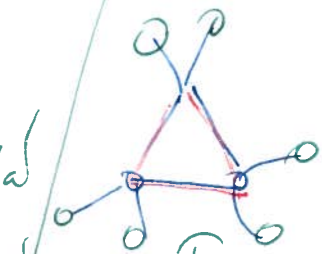
def.: Nezávislá množina v G je rozsáhlá, pokud protíná $\forall$ největší kliku v G.
(velikosti $\omega(G)$)

U je Ro.Ne.Mno. $\Leftrightarrow \omega(G-U) = \omega(G) - 1$

Př.:



tato nezávislá množina je rozsáhlá



není rozsáhlá

Lemma o Ro.Ne.Mno.: Pro lib. $\forall G$ jsou následující tvrzení ekvivalentní:

1) G je perfektní
2) $\forall H \leq_i G$: H má Ro.Ne.Mno.
3) $\forall H \leq_i G\ \forall x \in V(H)$: H má Ro.Ne.Mno. obsahující x

Důkaz: 3) ⇒ 2) triv.

2) ⇒ 1) Nechť $G' \leq_i G$. Cíl: obarvit G' $\omega := \omega(G')$ barvami

barva 1: R_1 = Ro.Ne.Mno. v G (aktuální ω)

2: R_2 = — " — v $G \setminus R_1$ .. $\omega(G \setminus R_1) = \omega - 1$

3: R_3 = — " — v $G \setminus (R_1 \cup R_2)$: $\omega - 2$

⋮

ω: zbylé vrcholy - musí být nezávislé .. 1

ÚG2 perfektní 4

1) ⇒ 3)

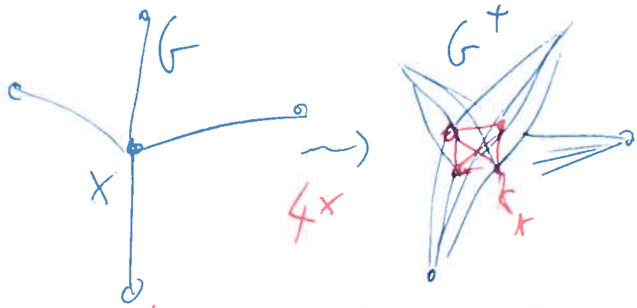
– obarvíme H pomocí $\omega(H)$ barev ($\chi(H)$)

c = barva x

– R = vrcholy barvy c ($\Rightarrow x \in R$)

R je Ro. Ne. Mno. – každá klika s $\omega(H)$ v H musí obsahovat vrchol barvy c $\square$

def.: k-násobné nafouknutí vrcholu $x \in V(G)$ – x nahradíme klikou K_k, sousedé x v G sousedí s $\forall$ vrcholem kliky K_k



Nafukovací lemma: G perfektní $\Rightarrow$ G^+ perfektní

(G^+ … k-nás. nafouknutí x)

Dk.: Mějme $H^+ \subseteq_i G^+$ … stačí: H^+ má Ro. Ne. Mno. (dle Lemma Ro. Ne. Mno.)

→ $|V(H^+) \cap K_k| \leq 1$ … pak $H^+ \subseteq_i G \Rightarrow H^+$ má Ro. Ne. Mno. (až na isomorfismus)

H^+ vzniklo nafouknutím $H \subseteq_i G$, H má Ro. Ne. Mno. R obsahující x

Nechť $y \in V(H^+) \cap K_k$ … $R^+ = R \setminus \{x\} \cup \{y\}$ je Ro. Ne. Mno.

C = lib. klika H^+ velikosti $\omega(H^+)$

1) $C \cap K_k = \emptyset \Rightarrow C \cap R \neq \emptyset$, $x \notin C \Rightarrow$
$\Rightarrow C \cap R^+ \neq \emptyset$

2) $C \cap K_k \neq \emptyset$ … C největší $\Rightarrow$
$V(K_k) \cap V(H) \subseteq V(C) \Rightarrow y \in C \cap R^+$

$\square$

$\square$

KG2 perfektní 5/

Důkaz slabé V. o Pe. Gr.: sporem: minimální protipříklad:
(co do # vrcholů)

G perfektní, ale $\bar{G}$ není perfektní

$\forall H <_i G$: H i $\bar{H}$ perfektní
($H \leq_i G$ & $H \not\equiv G$)

Lemma o Ro.Ne.Mno. $\Rightarrow$ $\exists G' \leq_i \bar{G}$: G' nemá Ro.Ne.Mno.

$G' = \bar{G} \Rightarrow \bar{G}$ nemá —"— $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\forall$ nezávislou množ. N v $\bar{G}$ $\exists$ klika v $\bar{G}$ velikosti $\omega(\bar{G})$,
kt. je disjunktní s $\bar{N}$

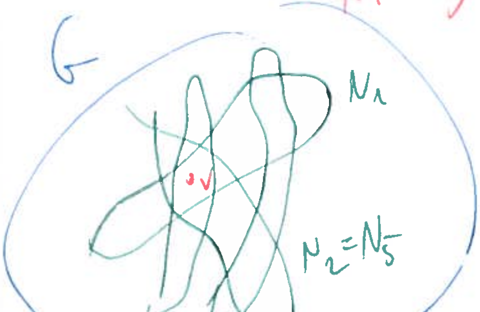
$\Rightarrow$ $\forall$ kliku Q v G $\exists$ nez. množ. N v G : $Q \cap N = \emptyset$
(velikosti $\alpha(G)$)

$Q_1, \dots Q_t$ = všechny kliky v G } $\omega(G) < t$
pro $i = 1 \dots t$: N_i = nez. množ. v G t.ž. $N_i \cap Q_i = \emptyset$
(velikosti $\alpha(G)$) (N_i se mohou opakovat)

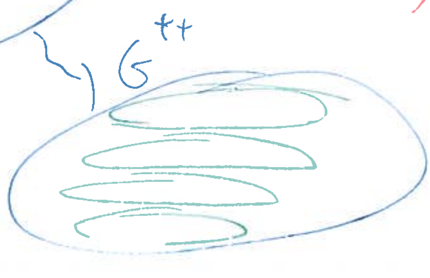
chceme použít
$\chi(G) \geq \frac{|V(G)|}{\alpha(G)}$

... pokud N_i různé a disjunktní (silný předpoklad)
$|V(G)| \geq t \cdot \alpha(G) \Rightarrow \chi(G) \geq t$
|| ... G perfektní
$\omega(G)$ — ↯ s $\omega(G) < t$

klíčový trik) zajistíme nafukováním vrcholů
$p(x) = |\{i : x \in N_i\}|$
- každý vrchol v nafoukneme $p(v)$-krát
($p(v) = 0 \Rightarrow v$ smažeme)



~> graf G^{++}
(je perfektní)



- $\alpha(G^{++}) = \alpha(G)$
- $|V(G^{++})| = t \cdot \alpha(G^{++})$

ŠG2 - perfektní G / 1

$$\chi(G^{++}) \geq \frac{|V(G^{++})|}{\alpha(G^{++})} = t$$

$\parallel$ --- G^{++} perfektní

$\omega(G^{++})$ největší klika Q^{++} v G^{++} je nafouknutí kliky Q_i v G

$\wedge$ $t-1$

$$\omega(G^{++}) = |Q^{++}| = \sum_{v \in Q_i} p(v) =$$

$$= \sum_{v \in Q_i} \sum_{j=1}^{t} |N_j \cap \{v\}| =$$

$\in \{0,1\}$

$$= \sum_{j=1}^{t} \sum_{v \in Q_i} |N_j \cap \{v\}| = \sum_{j=1}^{t} \underbrace{|N_j \cap Q_i|}_{\in \{0,1\}} \leq$$

nez. množ. klika

$\leq t-1$ $\rightarrow$ $N_i \cap Q_i = \emptyset$ ↯