def.: plocha P = souvislá 2-dimenzionální kompaktní varieta bez hranice
neformální

$P \subseteq \mathbb{R}^d$

(D) varieta bez hranice =
= ∀ bod x má okolí, kt. je homeomorfní otevřenému kruhu

lokálně stejná jako rovina

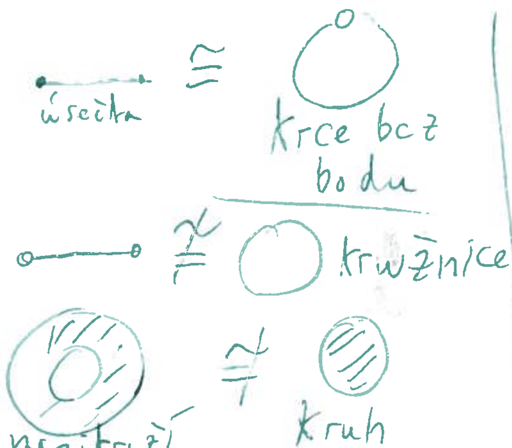
homeomorfismus (topologický izomorfismus) ≐ bijekce f, spojitá t. ž. f^{-1} je spojitá

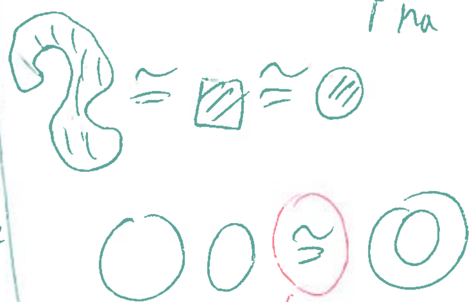
kompaktní = z každého pokrytí otevřenými množinami lze vybrat konečné pokrytí
v Euklidovských prostorech: = omezená a uzavřená

souvislost P = P nelze vyjádřit jako sjednocení dvou oddělených množin A, B
(: $(A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cup B) = \emptyset$)
uzávěr

P a Q homeomorfní, zn.: $P \cong Q$, pokud $\exists f: P \to Q$ homeomorfismus
„lze spojitě zdeformovat P na Q"

Př.:





deformaci nemusí být možné provést v rovině

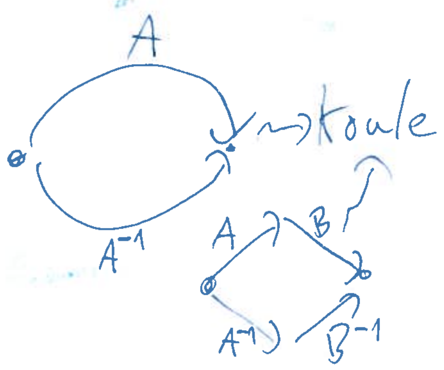
Př. ploch: sféra (povrch koule), torus (pneumatika), dvojitý torus
není plocha: rovina, otevřený kruh

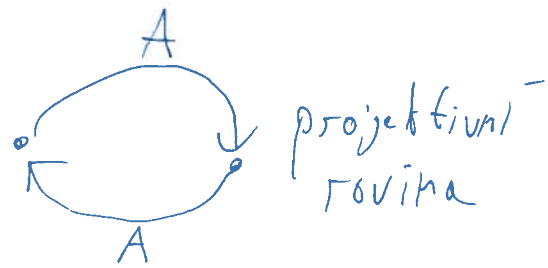
KG2 (5) 2/7

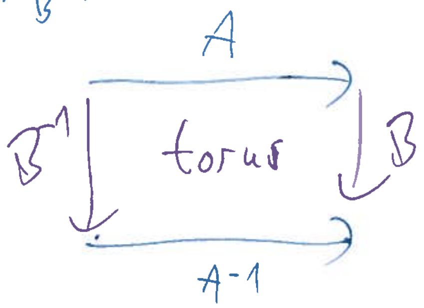
kompaktnost ⇒ plochu lze rozřezat na konečně mnoho polygonů

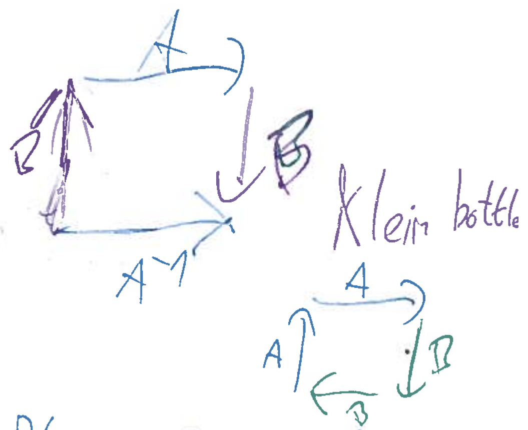
- budeme je slepovat k sobě → dostaneme 1 polygon t.ž. slepením jeho hran k sobě dostaneme plochu

Př.:



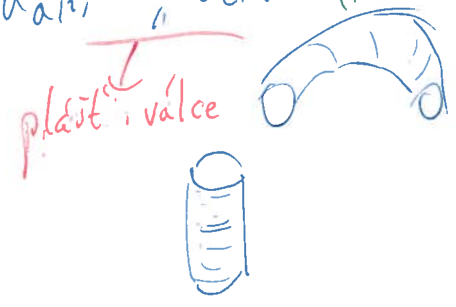


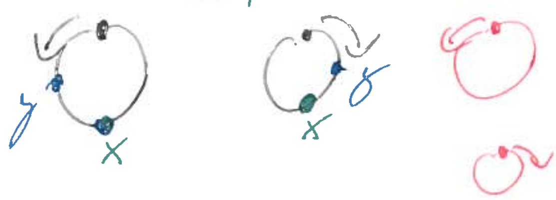




Fakt: každou plochu lze vytvořit ze sféry operacemi:

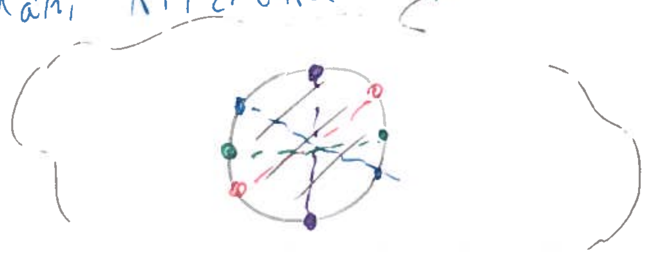
1) přidání „ucha" (madla) – vyřízneme ze sféry 2 kruhy a ztotožníme (! opačná orientace





2) přidání křižítka – nelze realizovat v R^3

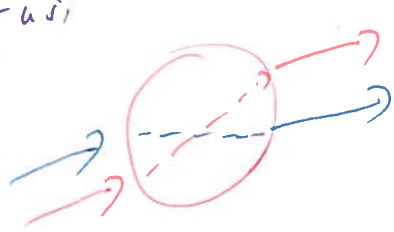
- vyříznutí kruhu a nalepení Möbiova pásku



Orientovatelnost ≡ (ze def. vlevo/vpravo

ucho ji neporuší

+ křížítko poruší



def.: Orientovatelná plocha Σ_g rodu $g \geq 0$ je plocha vzniklá ze sféry přidáním g uší

Neorientovatelná plocha Π_g rodu $g \geq 1$ je plocha vzniklá ze sféry přidáním g křížítek

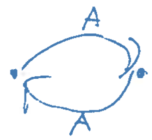
Fakt: plocha vzniklá ze sféry přidáním $k \geq 1$ křížítek a $l \geq 0$ uší je neorientovatelná a má rod $k+2l$

Fakt: - plochy Σ_g a Π_g jsou nehomeomorfní

- každá plocha je homeomorfní nějaké ploše $\Sigma_0, \Sigma_1, \dots$ nebo $\Pi_1, \Pi_2, \dots$

Př.: Σ_0 = sféra, Σ_1 = torus, Σ_2 = dvojitý torus

Π_1 = projektivní rovina, Π_2 = Kleinova láhev



def.: Nakreslení grafu (či multigrafu) $G=(V,E)$ na plochu Γ je zobrazení $\mathcal{G}: V \to \Gamma$, $E \to$ křivky na Γ

t.ž.: $\forall u \neq v \in V: \mathcal{G}(u) \neq \mathcal{G}(v)$

(křivka $\cong [0,1]$ spojitě)

- $\forall w \in V\ \forall uv \in E: \mathcal{G}(uv) \ni \mathcal{G}(w) \Rightarrow (w = u$ nebo $w = v)$ a $\mathcal{G}(w)$ je koncový bod křivky

- $\forall e,f \in E: \mathcal{G}(e) \cap \mathcal{G}(f) = \{\mathcal{G}(v) \mid v \in e \cap f\}$

Stěna nakreslení ≡ souvislá komponenta $\Gamma \setminus (\mathcal{G}(V) \cup \mathcal{G}(E))$

KG2 (4) 4/

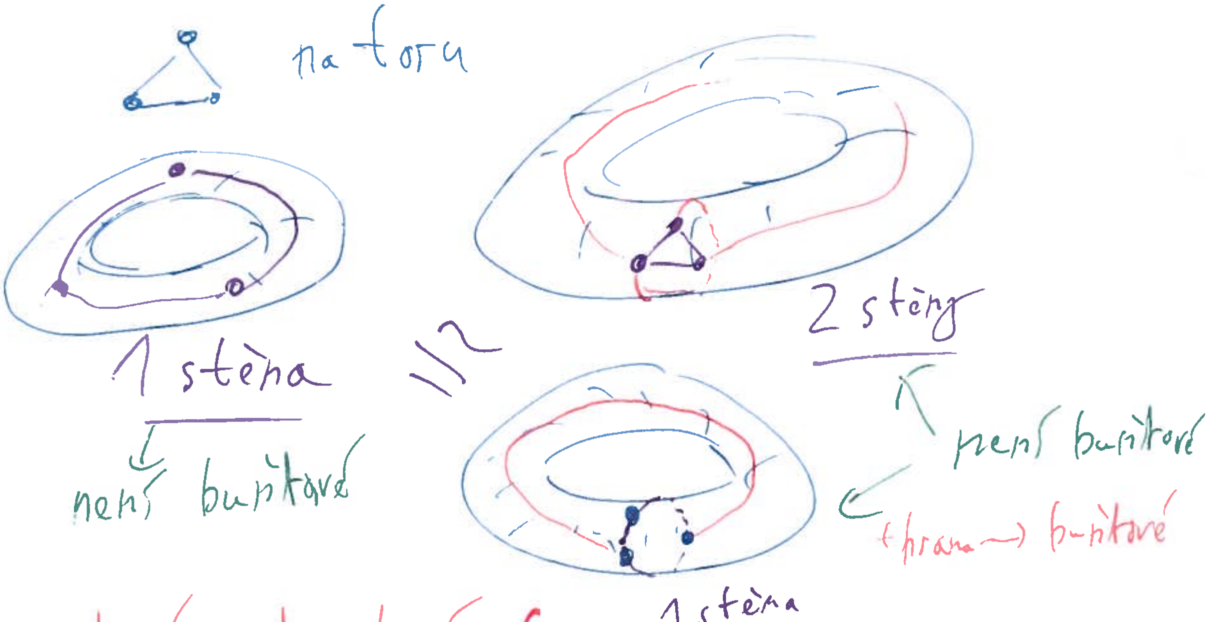
Eulerův vzorec: $G=(V,E)$ rovinný souvislý

$$|V|-|E|+s=2 \quad s=\#\text{stěn}$$

-- # stěn stejný pro ∀ nakreslení

platí i pro multigrafy

Zobecnění: na toru



def.: buňkové nakreslení G: každá jeho stěna je homeomorfní otevřenému kruhu

Fakt: Nakreslení G na sféru je buňkové ⟺ G souvislý

Věta (Zobecněný Eulerův vzorec): Nechť G je buňkové nakreslení $G=(V,E)$ na ploše, které má s stěn

1) Pokud plocha je Σ_g, pak $|V|-|E|+s=2-2g$

2) — " — Π_g, pak $|V|-|E|+s=2-g$

def.: Eulerova charakteristika plochy Γ:

$$ec(\Gamma)=\begin{cases}2-2g & \text{pro } \Gamma\cong\Sigma_g\\ 2-g & \text{pro } \Gamma\cong\Pi_g\end{cases}$$

$ec(\Gamma)=2-\#\text{křížítek}-2\cdot\#\text{uší}$

neformálně: $2-ec(\Gamma)=\#$ kruhů, kt. je potřeba vyříznout z koule)

Důsledek: Pro lib. nakreslení $G=(V,E)$ s s stěnami na Γ

$$|V|-|E|+s\geq ec(\Gamma)$$

KG2 (5. 5/7) plochy

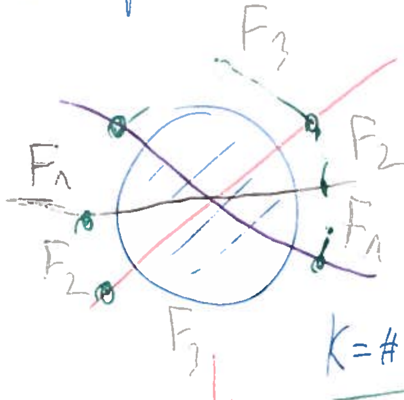
Dk. zobecněné Eulerovy f-le - skeč

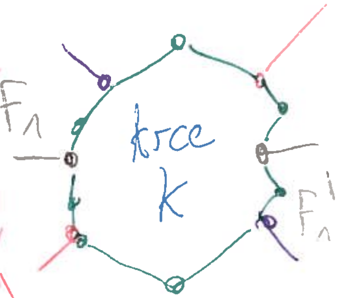
indukcí dle $ec(G)$: $\Gamma \cong \Sigma_0$ ... platí z Eulerovy f-le a

Γ vznikla přidáním křížítka k Γ'

podrozdělíme hrany u křížítka (nemění $|V|-|E|+s$)

$k = \#$ hran u křížítka





$\Rightarrow$ původní nakreslení buňkové $\Rightarrow$ nové nakreslení G' je buňkové

G' na ploše Γ'

$|V'| = |V| + 4k$

$|E'| = |E| + 4k - k$

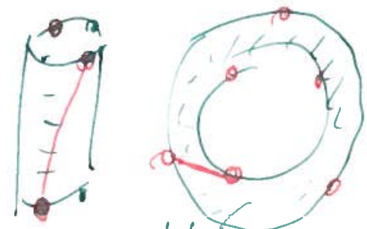
$s' =$ nový # stěn $= s + k + 1$

$\Rightarrow |V'| - |E'| + s' = |V| - |E| + s + 1$

$\| \ldots$ I.P. $\qquad \|$

$ec(\Gamma') = ec(\Gamma) + 1$

intuice k důsledku: do nebuňkové stěny lze přidat hranu a stěnu nerozdělit na 2:



$\rightsquigarrow \#$ stěn zůstává stejný a po konečném # kroků získáme buňkové nakreslení

(přidané hrany lze podrozdělit)

Γ' je Γ bez křížítka

$ec(\Gamma') = ec(\Gamma) + 1$

- přidání ucha - podobné ... z vyříznutých kruhů jsou nové stěny

Důsledek: $\forall\, G = (V, E)$ bez multihran a smyček nakreslitelný na plochu Γ platí:

pro $|V| \geq 3$

$|E| \leq 3|V| - 3\, ec(\Gamma)$

$\Uparrow$

průměrný stupeň $= \frac{2|E|}{|V|} \leq 6 - \frac{6\, ec(\Gamma)}{|V|}$

ro $\forall \Gamma\ \exists$ t-regulární graf nenakreslitelný na Γ

KG2 (5.) 6 ~~plochy~~ 7

$\chi(G)$ = vrcholová barevnost G

Věta (o 4 barvách) : Každý rovinný graf G : $\chi(G) \leq 4$

Def.: Heawoodovo číslo

$$H(\Gamma) := \left\lfloor \frac{7+\sqrt{49-24\,ec(\Gamma)}}{2} \right\rfloor$$

	koule	projektivní rovina	torus	Kleinova láhev		
plocha Γ	Σ_0	Π_1	Σ_1	Π_2	Π_3	Σ_2
$ec(\Gamma)$	2	1	0	0	−1	−2
$H(\Gamma)$	4	6	7	$\boxed{7}$	7	8

Věta: Pro graf G nakreslitelný na plochu Γ platí $\chi(G) \leq H(\Gamma)$

Dk.: $\Gamma \cong \Sigma_0$ ... Věta o 4 barvách

↳ předpokládáme $ec(\Gamma) < 2$

Sporem : Mějme G : $\chi(G) > H(\Gamma)$ a G je nakreslitelný na Γ

↖ vezmeme takové G s min. # vrcholů

(minimální protipříklad)

$n := |V(G)|$: platí: $n \geq \chi(G) \geq H(\Gamma)+1$

min. stupeň v G je $\geq H(\Gamma)$

: $\delta(G)$

; pro v stupně $< H(\Gamma)$: obarvíme $G - \{v\}$ $H(\Gamma)$ barvami

pak vrátíme v a obarvíme v barvou, se kterou nesousedí

TG2 (5.) 7/7
plochy

$H(\Gamma) \leq$ min. stupeň $\leq$ průměrný stupeň $\leq 6 - \frac{6ec(\Gamma)}{n}$

pro $\Gamma = \Pi_1$ $(ec = 1)$: $H(\Gamma) = 6 \not\leq 6 - \frac{6 \cdot 1}{n}$ ↯

$\Rightarrow ec(\Gamma) \leq 0$:

$H := H(\Gamma)$
$c := ec(\Gamma)$

$$H \leq 6 - \frac{6c}{n} \leq 6 - \frac{6c}{H+1}$$

$n \geq H+1$

$$\Downarrow$$

$$\frac{5 - \sqrt{49-24c}}{2} \leq H \leq \frac{5 + \sqrt{49-24c}}{2} \Leftarrow H^2 - 5H + 6(c-1) \leq 0$$

ale: $H = \left\lfloor \frac{7 + \sqrt{49-24c}}{2} \right\rfloor > \frac{7 + \sqrt{49-24c}}{2} - 1 = \frac{5 + \sqrt{49-24c}}{2}$ ↯ □

speciálně: každý G nakreslitelný na Γ obsahuje vrchol stupně $\leq H(\Gamma) - 1$

Věta (Ringel & Youngs). Na ploše $\Gamma \not\cong \Pi_2$ (=Kleinova láhev) lze nakreslit $K_{H(\Gamma)}$.

- K_6 lze nakreslit na Π_2, ale K_7 ne

Věta: Pro lib. graf G nakreslitelný na Π_2 platí $\chi(G) \leq 6$

(cvičení, pomocí