KG2 sym. 7/1

Počítání objektů až na symetrie

př.: # obarvení krychle k barvami až na otočení

neizomorfních grafů na n vrcholech

pozic v deskové hře až na otočení či zrcadlení desky

př.: deska ⊞, ▦ ~ ▦

Symetrie: – grupa symetrií množiny objektů $\mathbb{P}$

zn.: $(\Gamma, id, \circ, ^{-1})$

př.: k-obarvení krychle

$|\mathbb{P}| = k^6$

def.: Akce grupy Γ na množině $\mathbb{P}$ je fce $a: \Gamma \to \mathbb{P}^{\mathbb{P}}$

tedy každému prvku $g \in \Gamma$ odpovídá fce $a_g: \mathbb{P} \to \mathbb{P}$,

a platí 1.) a_1 je identita .. $\forall p \in \mathbb{P}: a_{id}(p) = p$

2.) $\forall g, h \in \Gamma\ \forall p \in \mathbb{P}: a_{g \circ h}(p) = a_g(a_h(p))$

$a_{g^{-1}}$ je inverzní fce k a_g

👁 $\forall g \in \Gamma: a_g$ je permutace $\mathbb{P}$

př.: Akce $S_{ym\,n}$ na množině všech grafů s vrcholy $\{1, \dots n\}$

Akce grupy otočení krychle na k-obarvených krychlích

Akce grupy symetrií čtverce na herní desce $n \times n$

– Pro $x, y \in \mathbb{P}$: relace $x \sim_a y \iff \exists g \in \Gamma: x = a_g(y)$

x, y stejné až na symetrii

👁 $\sim_a$ je ekvivalence

def.: Třídy ekvivalence $\sim_a$ jsou tzv. orbity

$[x]$ = orbita x .. $[x] = \{y \in \mathbb{P} : x \sim_a y\}$ $\mathbb{P}/_{\Gamma}$ je množina orbit

orbit = # objektů až na symetrie

KG2 Sym. 2/ 1

def.: Pro $g \in \Gamma$ je $p \in \mathcal{P}$ pevným bodem, pokud $a_g(p) = p$

zn.: $\mathrm{Fix}_a(g) = \{p \in \mathcal{P} : a_g(p) = p\}$

př.: pro prohození vrcholů 1 2 : pevné body jsou grafy, kde vrcholy 1 a 2 mají stejné sousedy

↳ permutace (12)

Věta („Burnsideovo lemma") Pro každou konečnou grupu Γ a akci Γ na konečné množině $\mathcal{P}$ platí

↳ Cauchy-Frobenius

$$\#\text{orbit} = \frac{1}{|\Gamma|} \sum_{g \in \Gamma} |\mathrm{Fix}_a(g)|$$

neboli: # objektů až na symetrie = průměrný # pevných bodů

---

př.: deska 3×3, 1 druh kamene, na každém poli ≤ 1 kámen

$$\Gamma_\square = \{\underbrace{\mathrm{id},\ 90^\circ,\ -90^\circ,\ 180^\circ}_{\text{otočení}},\ \ldots\}$$

$\Gamma_\square$	$\lvert\mathrm{Fix}_a(g)\rvert$
90°	2^3
-90°	2^3
180°	2^5
id	2^9
	2^6
	2^6
	2^6
	2^6

$$\Rightarrow \#\text{orbit} = \frac{1}{8}\left(2^9 + 2^5 + 2\cdot 2^3 + 4\cdot 2^6\right) =$$

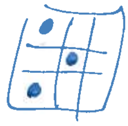
$$= 2^6 + 6 + 2^5 = 102$$

($|\mathcal{P}| = 2^9 = 512$ = #objektů = #pozic)

KG2 sylm. 3/

def.: Stabilizátor prvku $p \in P$ je $\{g \in \Gamma : a_g(p) = p\} =: Stab_a(p)$

stabilizátor je podgrupa Γ

př.: $p =$ 

$stab(p) = \{id, \circlearrowleft\}$

def.: $Zobr_a(p,q) = \{g \in G : a_g(p) = q\}$

$Stab_a(p) = Zobr_a(p,p)$

Lemma o orbitě a stabilizátoru: Nechť a je akce konečné grupy G na T. Pak $\forall p \in P$: $|[p]| \cdot |Stab(p)| = |\Gamma|$

Dk.: Ukážeme: 1) $\forall y \in [x]$: $|Stab(x)| = |Zobr(x,y)|$ ... pro $y \notin [x]$: $Zobr(x,y) = \emptyset$

2) $\forall y, z \in [x]$: $Zobr(x,y) \cap Zobr(x,z) = \emptyset$

↳ platí: $\forall g \in \Gamma : \exists! y \in [x] : a_g(x) = y$

1) + 2) ⇒ Lemma

1): bijekce mezi $Stab(x)$ a $Zobr(x,y)$ ... nechť $h \in G$: $a_h(x) = y$ ↳ existuje: $y \in [x]$

$\pi : Stab(x) \to Zobr(x,y)$

$\pi(g) = h \circ g$

pro $g \in Stab(x)$: $a_h(\underbrace{a_g(x)}_{=x}) = y$ ⇒ $h \circ g \in Zobr(x,y)$

pro $f \in Zobr(x,y)$: $a_{h^{-1}}(\underbrace{a_f(x)}_{=y}) = x$ (⇐) $a_h(x) = y$)

⇒ složení s h je bijekce mezi $Stab(x)$ a $Zobr(x,y)$ $\square$

Věta (obecná verze Burnsideova lemmatu): ↗ i pro nekonečné množiny objektů – v takovém případě musí být orbity vážené

Mějme akci a grupy Γ na P, kde každá orbita $\sigma \in P/\Gamma$ má přiřazenu váhu $\|\sigma\| \in \mathbb{N}_0$ tak, že $\forall n \in \mathbb{N}_0$: existuje jen konečně mnoho orbit váhy n.

Potom $$\sum_{\sigma \in P/\Gamma} x^{\|\sigma\|} = \frac{1}{|\Gamma|} \cdot \sum_{g \in \Gamma} \sum_{p \in Fix(g)} x^{\|[p]\|}$$ ← rovnost formálních mocninných řad (FMŘ)

KG2 Sym. 4

z obecné verze vyplývá formule pro konečné $\mathcal{P}$ $\to x=1$, $\|\sigma\|=0 \ \forall \sigma \in \mathcal{P}/\Gamma$

Důkaz obecné verze: $\mathcal{D} := \{(g,p)\in\Gamma\times\mathcal{P} : a_g(p)=p\}$

$$a_g(p)=p \Leftrightarrow g\in Stab(p) \Leftrightarrow p\in Fix(g)$$

a $S = \sum_{(g,p)\in\mathcal{D}} x^{\|[p]\|}$

F.M.R.

počítání S dvěma způsoby: 1) $S=\sum_{g\in\Gamma}\sum_{\substack{p\in\mathcal{P}:\\(g,p)\in\mathcal{D}}} x^{\|[p]\|}$

$x\in Fix(g)$

2) $S=\sum_{p\in\mathcal{P}}\sum_{\substack{g\in\Gamma:\\(g,p)\in\mathcal{D}\\ \Updownarrow \\ g\in Stab(p)}} x^{\|[\ ]\|} = \sum_{p\in\mathcal{P}} |Stab(p)|\cdot x^{\|[p]\|} =$

$$\underset{\text{L. o orbitě a stabilizátoru}}{=} \sum_{p\in\mathcal{P}} \frac{|\Gamma|}{|[p]|} x^{\|[p]\|} = \sum_{\sigma\in\mathcal{P}/\Gamma}\sum_{p\in\sigma}\frac{|\Gamma|}{|\sigma|}\cdot x^{\|\sigma\|} =$$

$$=|\Gamma|\cdot\sum_{\sigma\in\mathcal{P}/\Gamma} x^{\|\sigma\|} \qquad \square$$

AG 2 sem., 5/

př.: deska 2×2, na každém políčku může být lib. počet kamenů (nerozlišitelných)

$$\mathcal{P}_{\boxplus} = \left\{ \begin{array}{|c|c|} \hline a & b \\ \hline c & d \\ \hline \end{array},\ a,b,c,d \in \mathbb{N}_0 \right\},\quad \Gamma_{rot} = \{id, 90°, 180°, -90°\}$$

váha orbity $\left\| \left[\begin{array}{|c|c|} \hline a & b \\ \hline c & d \\ \hline \end{array} \right] \right\| = a+b+c+d$

dle váhy → 0: $\left\{ \left[\begin{array}{|c|c|} \hline 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline \end{array} \right] \right\}$

1: $\left\{ \left[\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline \end{array} \right] \right\}$

2: $\left\{ \left[\begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline \end{array} \right], \left[\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline \end{array} \right], \left[\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & \\ \hline & 1 \\ \hline \end{array} \right] \right\}$

$a_n = \#$orbit váhy n

formální mocninná řada $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{\sigma \in \mathcal{P}/\Gamma} x^{\|\sigma\|} =$

$$= \frac{1}{|\Gamma|} \sum_{g \in \Gamma} \underbrace{\sum_{p \in Fix(g)} x^{\|[p]\|}}_{\text{vytvoř. fce pro } g \in G} \quad (*)$$

obecné Burnsideovo l.

$g \in G$	$Fix(g)$	FMŘ $\sum_{p \in Fix(g)} x^{\|[p]\|}$
id	$\mathcal{P}$ = všechny čtveřice čísel $a,b,c,d \geq 0$	$\sum_{(a,b,c,d) \in \mathbb{N}_0^4} x^{a+b+c+d} = \left(\sum_{a \in \mathbb{N}_0} x^a\right) \cdot \left(\sum_{b \in \mathbb{N}_0} x^b\right) \cdot \left(\sum_{c \in \mathbb{N}_0} x^c\right) \cdot \left(\sum_{d \in \mathbb{N}_0} x^d\right) = \left(\frac{1}{1-x}\right)^4$
90°	$\left\{ \begin{array}{\|c\|c\|} \hline a & a \\ \hline a & a \\ \hline \end{array} : a \in \mathbb{N}_0 \right\}$	$\sum_{a \in \mathbb{N}_0} x^{4a} = 1 + x^4 + x^8 + \dots = \frac{1}{1-x^4}$
-90°	—"—	—"—

$1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1-x}$

KG2 sym. 6

$180° \circlearrowright$

$\begin{array}{|c|c|} \hline a & b \\ \hline b & a \\ \hline \end{array}$

$$\sum_{a,b \in \mathbb{N}_0} x^{2a+2b} = \left(\sum_{a \in \mathbb{N}_0} x^{2a}\right)^2 = \left(\frac{1}{1-x^2}\right)^2$$

$$(*) = \frac{1}{4}\left(\left(\frac{1}{1-x}\right)^4 + \frac{2}{1-x^4} + \left(\frac{1}{1-x^2}\right)^2\right)$$

+ rozklad na parciální zlomky $\rightsquigarrow$ vzorec pro a_n