1. přednáška – úvod [11.6]

– sylabus – návaznost na KG1

– poznámky – na webu
– a záznamy (snad)

– ZK – ústní

– dotazy – ptejte se

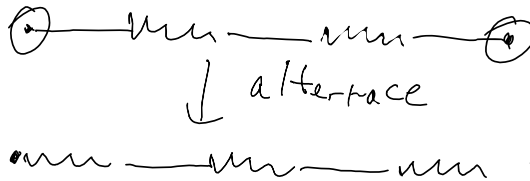
– úvod do párování – viz papír č. 2

$G=(V,E)$, M párování v G

Lemma o V.S.C.: M je největší párování $\iff$ $\nexists$ V.S.C. vůči M

M není největší $\iff$ $\exists$ V.S.C. vůči M

$\Leftarrow$



párování M' t.ž. $|M'|>|M|$

$\Rightarrow$ $\exists$ větší párování M'

$(V, M\cup M')$ ... stupně ≤ 2

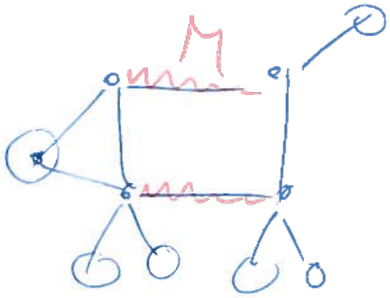
– komponenty – cesty – sudé délky – stejně hran v M i v M'
– liché

– kružnice – pouze sudé

$|M'|>|M| \Rightarrow \exists$ lichá cesta začínající a končící hranou z M' – je to VSC pro M $\square$

$G=(V,E)$

def.: $M \subseteq E$ párování, pokud (V,M) má st stupně ≤ 1



- bip. grafy – V.P. (vrcholové pokrytí) přes toky
- V.P. NP-těžký problém

mějme párování M

def.: $v \in V$ je volný vrchol, pokud v nepatří do hrany M (zn.: ⊙) vůči M

- cesta P je střídavá, pokud se na ní střídají párovací a nepárovací hrany
  $\in M$ $\notin M$

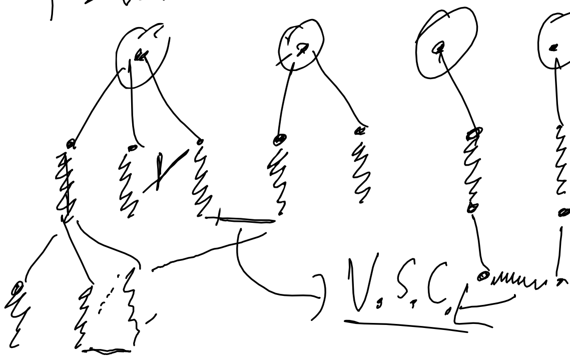
- P je volná střídavá cesta (VSC), pokud P je střídavá a 1. a poslední vrchol jsou volné $\Rightarrow$ lichá délka

(2.) 3/6

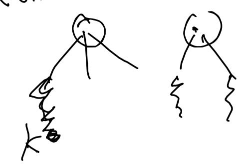
máme G a M,
cíl: najít V.S.C. nebo zahlásit „M je největší"

BFS pro V.S.C.
→ Edmondsův les

F = volné



→ po kontrakci květu



def.: kytka – v G vůči M

stř. střídavá cesta sudé délky z volného vrch. do v_1

květ C – kruž. liché délky

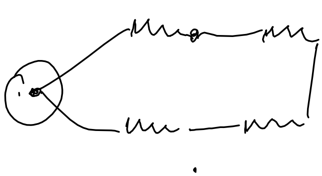
$C = \{v_1 \dots v_{2l+1}\}$

pro $i = 1 \dots l$

$v_{2i-1} v_{2i} \notin M$

$v_{2i} v_{2i+1} \in M$

$v_{2l+1} v_1 \notin M$



– pokud najdeme kytku →

→ zkontrahujeme květ C do vrcholu A

kontrakce e

KG2 – 1. přednáška

def: $G = (V, E)$ a $e = \{u, v\} \in E$ (1.) 4/6

$G.e$ je graf vzniklý kontrakcí e,

kde $V(G.e) = V \setminus \{u,v\} \cup \{v_e\}$

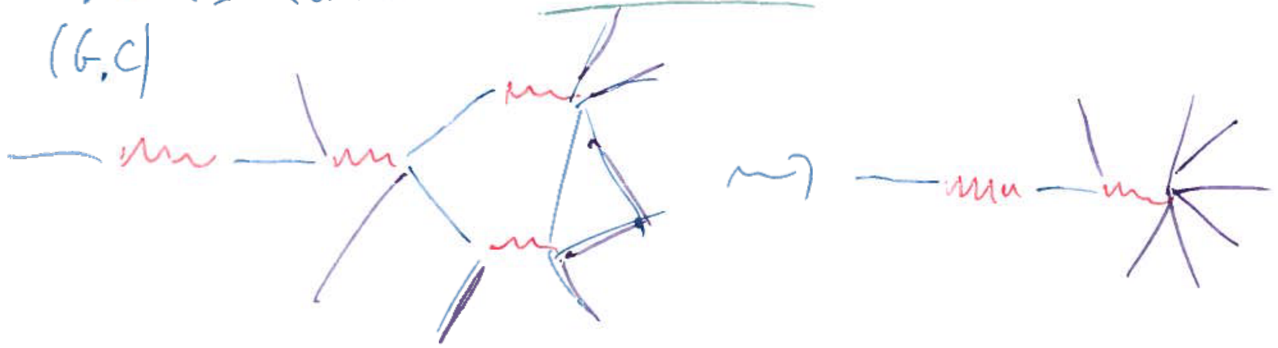
$E(G.e) = E \cap \left({V \setminus \{u,v\} \atop 2} \right) \cup \{\{v_e, x\} : (\{x,u\} \in E \vee \{v,x\} \in E$

$\wedge\ x \notin \{u,v\}$

nezávisí na pořadí kontrakcí

G/C .. kontrakce $\forall$ hran květu C do vrch. k

$(G.C)$



$M \setminus C$ párování v G/C velikosti $|M \setminus C| = |M| - \ell$

(pro $|C| = 2\ell + 1$)

Lemma KK (o kontrakci květu): $G = (V, E)$ a M párování v G

Nechť C je květ v G (vůči M).

Pak M je největší párování v G $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $M \setminus C$ je největší v G/C.

Navíc: z VSC v G/C vůči $M \setminus C$ jsme schopni v $O(m+n)$ zkonstruovat VSC v G vůči M

KG2 - (1.) (1.) 5/6

Procedura Najdi VSC nebo kytku (G, M)

nebo zda další M největší

F = volné vrcholy ... fronta pro BFS $\quad r(v) = \emptyset$

$h(v)$ - hladina v

$r(v)$ = rodič v

1) Dokud $F \neq \emptyset$:

odeber v z F

1) if $h(v)$ liché:

u : $\{v, u\} \in M$ ... ignorujeme ostatní hrany

→ nemusíme probírat celý graf

a) if $h(u)$ nedef.:

$h(u) = h(v) + 1$, $r(u) = v$

... přidám u na konec F

b) if $h(u)$ sudé ... nelze

c) if $h(u)$ liché:

P_v := cesta z v do kořene (volného)

P_u = — " u — " ——

if $P_v \cap P_u = \emptyset$: → VSC

else → kytka

} konec

2) if $h(v)$ sudé:

$\forall u : \{u, v\} \in G$:

a) if $h(u)$ nedef.:

$h(u) = h(v) + 1$, $r(u) = v$

přidej u na konec F

b) if $h(u)$ liché ... ~~?~~ nedělám nic

c) if $h(u)$ sudé:

P_v = cesta ... —

P_u — —

$P_v \cap P_u = \emptyset \Rightarrow$ VSC

else kytka

} konec

o korektnosti:

Pokud nenastane 1c) či 2c)

→ ukážeme, že M největší ($\nexists$ VSC)

K62 (1.) Lemma o korektnosti (1.) 6/6

Dk. sporem: nechť 1d a 2d nenastane a $\exists$ VSC ($\Leftarrow$) M není největší (Lemma o VSC)

P = VSC $v_0 v_1 \dots v_k$

Tvrzení: $\forall i = 0 \dots k$: $h(v_i)$ def. & $h(v_i) \equiv i \mod 2$

Dk. indukcí: $i=0$: $h(v_0)=0$

$i > 0$ I. i liché: I.P. $\Rightarrow h(v_{i-1})$ sudé

$\Rightarrow h(v_i)$ musí být def.

spor: $h(v_i)$ sudé $\Rightarrow$ VSC je kytka (případ 2b)

$\Rightarrow h(v_i)$ liché

II. i sudé I.P. $\Rightarrow h(v_{i-1})$ liché

$v_{i-1} v_i \in M$

- případy 1b a 1c nenastaly $\Rightarrow$

$\Rightarrow h(v_i)$ sudé

P je VSC $\Rightarrow$ k liché $\Rightarrow$ $h(v_k)$ liché

$\Rightarrow v_k$ volný $\Rightarrow h(v_k)=0$ ↯

□