

11. CVIČENÍ Z KG 2, PONDĚLÍ 15.5.

„Burnsideovo“ lemma na počítání objektů modulo symetrie

Definice.

- Akce α grupy Γ na množině \mathcal{P} je funkce $\Gamma \times \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ t.ž.
 - $\alpha(\text{id}, p) = p$
 - $\alpha(\pi_1 \circ \pi_2, p) = \alpha(\pi_1, \alpha(\pi_2, p))$.
- Orbita $[p]$ prvku $p \in \mathcal{P}$: $\{\alpha(\pi, p) : \pi \in \Gamma\}$
- \mathcal{P}/Γ : množina všech orbit
- $\text{Fix}(\pi) = \{p \in \mathcal{P} : \alpha(\pi, p) = p\}$: množina pevných bodů π .

Lemma („Burnsideovo“ lemma). Pro akci konečné grupy Γ na množině \mathcal{P} platí

$$|\mathcal{P}/\Gamma| = \frac{1}{|\Gamma|} \sum_{\pi \in \Gamma} |\text{Fix}(\pi)|$$

Pokud každé orbitě $o \in \mathcal{P}/\Gamma$ přiřadíme váhu $\|o\| \in \mathbb{N}_0$, pak

$$\sum_{o \in \mathcal{P}/\Gamma} x^{\|o\|} = \frac{1}{|\Gamma|} \sum_{\pi \in \Gamma} \sum_{p \in \text{Fix}(\pi)} x^{\|p\|};$$

ve váženém případě nemusíme mít konečnou velikost \mathcal{P} nebo množiny orbit.

1. Obarvení krychle. Spočítejte počet různých obarvení stěn krychle k barvami až na otočení.

2. Určete počet neizomorfních grafů na 4 vrcholech pomocí „Burnsideova“ lemmatu.

3. Neizomorfní grafy s daným počet hran. Mějme OVF $G(x) = \sum_{m=0}^6 g_m x^m$, kde g_m je počet neizomorfních grafů na 4 vrcholech s m hranami. Pomocí vážené varianty Burnsideova lemmatu vyjádřete $G(x)$ (nemusíte roznásobovat jednotlivé polynomy).

4. Cyklické rozklady n . Určete vytvořující funkci pro počty rozkladů n na součet 5 přirozených čísel uspořádaných do cyklu, kdy rozklady lišící se otočením nebo zrcadlením se považují za stejné.