8. CVIČENÍ Z KG 2, PONDĚLÍ 3.4.

Perfektní grafy

1. *Liché antidíry nejsou perfektní.* Ukažte, že doplněk liché kružnice na alespoň pěti vrcholech, tedy $\overline{C_{2k+1}}$ pro $k \geq 2$, není perfektní a speciálně má větší barevnost χ než klikovost ω.

2. *Split grafy jsou perfektní.* Split graf je takový graf, v němž lze rozdělit vrcholy na dvě části K a N, přičemž K tvoří kliku a N nezávislou množinu (hrany mezi K a N mohou být libovolné) – ukažte, že takové grafy jsou perfektní.

3. Ukažte, že *doplňky bipartitních grafů jsou perfektní* a to bez použití slabé věty o perfektních grafech.

4. *Rozsáhlá nezávislá množina (RoNeMno).* Dokažte, že v libovolném perfektním grafu existuje RoNeMno, tedy nezávislá množina protínající všechny kliky v G velikosti $\omega(G)$ (čili obsahuje alespoň jeden vrchol z každé největší kliky). Jak zajistit, aby nalezené RoNeMno obsahovalo předepsaný vrchol?

5. *Opačný směr.* Mějme G takový, že každý jeho indukovaný podgraf má RoNeMno. Ukažte, že G je perfektní.

6. *Nafouknutí vrcholu.* Nechť G je graf a v jeho vrchol. Buď H graf, v němž nahradíme v klikou, přičemž vrcholy v klice mají stejné sousedy mimo kliku jako mělo v. Ukažte, že G je perfektní právě tehdy, když H je perfektní.