6. CVIČENÍ Z KG 2, PONDĚLÍ 13.3.

Kreslení grafů na plochy

1. Zkuste nalézt alespoň dvě různá (nehomeomorfní) nakreslení K_5. (Hint: stačí, aby se multimonožiny velikostí stěn lišily, kde velikost stěny je počet jejích hran. Bonus: Dokážete se obejít i bez toho?)

2. Nechť G je nakreslený na ploše Γ a má alespoň 3 vrcholy. Ukažte, že ze zobecněné Eulerovy formule plyne
$$|E(G)| \leq 3|V(G)| - 3\mathrm{ech}(\Gamma),$$
a jestliže G neobsahuje trojúhelník, pak $|E(G)| \leq 2|V(G)| - 2\mathrm{ech}(\Gamma)$.

3. Ukažte, že nakreslení K_7 na torus je triangulace toru (tedy je buňkové a každá stěna je ohraničena trojúhelníkem v grafu).

4. Nechť $\Delta(G)$ je maximální stupeň v grafu G. Ukažte, že vrcholy G lze obarvit $\Delta(G) + 1$ barvami tak, aby žádná hrana nebyla jednobarevná, tedy barevnost G je nejvýše $\Delta(G) + 1$.

(Na přednášce bude Brooksova věta, která říká, že pro souvislý graf stačí $\Delta(G)$ barev, ledaže jde o lichý cyklus nebo úplný graf.)

5. Dokažte, že graf nakreslitený na Kleinově láhvi má barevnost nejvýše 6. (Hint: podobně jako na přednášce uvažte minimální protipříklad a ukažte dolní odhad na minimální stupeň. Může se hodit Brooksova věta a fakt, že K_7 *nelze* nakreslit na Kleinovu láhev.)

6. Nalezněte graf, který lze nakreslit na torus tak, že má všechny stěny ohraničeny čtyřcyklem a přitom má barevnost tři. Dále najděte graf, který s barevností čtyři a nakreslením v projektivní rovině, jež má všechny stěny čtyřúhleníkové.