4. CVIČENÍ Z KG 2, PONDĚLÍ 6.3.

Minory, topologické minory a část důkazu Kuratowského-Wagnerovy věty

1. *Opakování.* Ukažte, že K_5 ani $K_{3,3}$ nejsou rovinné grafy.

2. *Alternativní definice minoru.* Ukažte, že následující definice jsou ekvivalentní:

a) H je minorem G, tedy $H \preceq_m G$, pokud lze (izomorfní kopii) H získat z G operacemi mazání vrcholů a hran a kontrakcemi hran.

b) $H \preceq_m G$, pokud lze (izomorfní kopii) H získat z podgrafu G kontrakcemi hran (tedy nejprve budeme mazat a až potom dělat kontrakce).

c) $H \preceq_m G$, pokud v G existují navzájem disjunktní podmnožiny vrcholů $\{X_v\}_{v \in V(H)}$ takové, že $G[X_v]$ jsou souvislý a pokud $uv \in E(H)$, pak existuje hrana mezi X_u a X_v.

3. *Minory a malé stupně.* Nechť maximální stupeň H splňuje $\Delta(H) \leq 3$. Jestliže $H \preceq_m G$, pak G obsahuje podrozdělení H, tedy $H \preceq_t G$. (Speciálně: pokud $K_{3,3} \preceq_m G$, pak $K_{3,3} \preceq_t G$.)

4. *Pro K_5 obrácená implikace neplatí...* Najděte graf obsahující K_5 jako minor, ale ne jako topologický minor (tedy G neobsahuje podrozdělení K_5 jako podgraf).

5. *... ale platí skoro.* Ukažte, že jestliže $K_5 \preceq_m G$, pak G obsahuje podrozdělení K_5 nebo $K_{3,3}$.

6. 2-*souvislý případ.* Nechť $G = G_1 \cup G_2$ je vrcholově 2-souvislý a $V(G_1 \cap G_2) = \{u, v\}$. Ukažte, že:

a) $G_1 + uv$ je minor G.

b) Jsou-li grafy $G_1 + uv$ a $G_2 + uv$ rovinné, pak G je rovinný. (Můžete použít následující fakt: Pokud G je 2-souvislý a rovinný, pak pro každou hranu e existuje nakreslení, které má e na vnější stěně.)