3. CVIČENÍ Z KG 2, PONDĚLÍ 27.2. 14:00

Tutte, Berge a Petersen o perfektních párováních

Theorem 1 (Tutte). *Graf G má perfektní párování právě tehdy, když pro každou $A \subseteq V(G)$ je počet lichých komponent v $G \setminus A$ menší nebo roven $|A|$.*

Dokonce obecněji platí, že velikost největšího párování v libovolném grafu G je rovna

$$\frac{|V(G)| - \max_{A \subseteq V(G)}(\mathrm{odd}(G \setminus A) - |A|)}{2} \tag{1}$$

kde $\mathrm{odd}(G \setminus A)$ je počet lichých komponent v $G \setminus A$. (Toto zobecnění vymyslel Berge.)

Theorem 2 (Petersen). *Každý kubický (tedy 3-regulární) graf bez mostů má perfektní párování.*

1. *Lemma o třešničce.* Dokažte, že každý souvislý graf, který není úplný, obsahuje *indukovanou* cestu na třech vrcholech, tedy indukovaný podgraf $K_{1,2}$.

2. *Liché lemma.* Nechť G je graf, kde každý vrchol má lichý stupeň. Ukažte, že pak pro libovolnou množinu $A \subseteq V(G)$ liché velikosti platí, že mezi A a $V(G) \setminus A$ vede lichý počet hran.

3. *Zeslabení podmínek u Petersena.* Najděte graf bez perfektního párování, který

a) je 3-regulární a souvislý (ale ne 2-souvislý)

b) je 2-souvislý a má všechny stupně ≥ 3

4. *Petersen pomocí Tutta.* Dokažte Petersenovu větu ověřením Tutteovy podmínky za pomoci lichého lemmatu.

(Bonus: Pro jakou nejmenší volbu s v závislosti na d platí, že každý d-regulární a hranově s-souvislý graf má perfektní párování?)

5. *Bonus pro náročné: Vzorec pro velikost největšího párování.* Dokažte vzorec (1). Jedna nerovnost by měla být snadná, druhá vyžaduje několik kroků:

- Nejprve šikovně definujeme množinu A a poté najdeme párování velikosti $\Big(|V(G)| - \mathrm{odd}(G \setminus A) + |A|\Big)/2$.
- Zvolme tedy $A \subseteq V(G)$ takové, že $\mathrm{odd}(G \setminus A) - |A|$ je co největší a mezi takovými množinami A vybereme tu, která má největší velikost $|A|$. (Často použijeme spor s volbou A.)
- Pro toto A je potřeba dokázat:
  a) Každá komponenta $G \setminus A$ je lichá.
  b) Pro každou komponentu C grafu $G \setminus A$ a každý vrchol $v \in V(C)$ platí, že $G - v$ má perfektní párování. (Hint: použijte indukci)
  c) Lze spárovat vrcholy z A s komponentami $G \setminus A$. (Přesněji: v bipartitním grafu s jednou partitou A a druhou partitou tvořenou komponentami $G \setminus A$ existuje párování pokrývající A.)
  d) Ukažte, že tyto vlastnosti stačí, abychom našli párování velikosti $\Big(|V(G)| - \mathrm{odd}(G \setminus A) + |A|\Big)/2$.