2. CVIČENÍ Z KG 2, PONDĚLÍ 20.2. 14:00

Edmondsova algoritmus na hledání největšího párování

Dvě lemmata z přednášky:

Lemma 1 (Lemma VSC (o volné střídavé cestě))**.** *Mějme graf G a v něm párování M. Pak G obsahuje volnou střídavou cestu (VSC) vůči M právě tehdy, když M není největší.*

Lemma 2 (Lemma KK (o kontrakci květu))**.** *Mějme graf G a v něm párování M. Nechť je v G* kytka*, kterou tvoří stonek S a květ C. Pak G obsahuje volnou střídavou cestu (VSC) vůči M právě tehdy, když G/C (G se zkontrahovaným květem C) obsahuje VSC.*

1. *Kompletace Edmondsova algoritmu.* Na přednášce jsme si ukazovali algoritmus NajdiVSCneboKytku(G, M), která v G najde volnou střídavou cestu (VSC) nebo kytku vůči párování M anebo korektně ohlásí, že M je největší párování v M.

a) Popište celý algoritmus, který najde největší párování v M za pomoci procedury NajdiVSCneboKytku.
b) Určete časovou složitost vzhledem k počtu vrcholů n a počtu hran m.
c) Bous: Zkuste najít příklad, na němž je analýza časové složitosti těsná (odhad na počet iterací nebo počet rekurzivních volání nelze zlepšit).

(Algoritmus lze zrychlit pomocí chytrých datových struktur, ale to není třeba rozmýšlet)

2. *Lemma KK (o kontrakci květu).* K úplnosti analýzy Edmondsova algoritmu nám už chybí dokázat jen Lemma KK.

a) Nechť M je párování v G a $M \setminus C$ je párování v G/C. Ukažte, že pokud $M \setminus C$ není největší v G/C, pak ani M není největší v G.
b) Dokažte opačnou implikaci za předpokladu, že vrchol v_0 (tedy vrchol v průniku květu a stonku) je *volný* (to speciálně nastane, když má stonek délku 0).
c) Jak se tohoto předpokladu elegantně zbavit?
d) Nechť máme VSC P' v zkontrahovaném grafu G/C vůči $M \setminus C$. Jak z ní efektivně zkonstruovat VSC P v G vůči M?

Zbylé z minula:

3. *Polygony.* Dostali jsme dva čtverce papíru o obsahu přesně 2023, oba rozdělené na 2023 mnohoúhelníků o jednotkovém obsahu Rozdělení na mnohoúhelníky může být na každém papíře různé. Položíme papíry na sebe a chceme je propíchnout 2023 krát tak, abychom propíchli vnitřek každého mnohoúhelníku na obou papírech (4046 propíchnutí by bylo triviální, stačilo by vzít propíchat každý papír zvlášť).

4. *Zobecněný Hall pro dva reprezentanty.* Mějme bipartitní graf $G = (A \cup B, E)$ a předpokládejme, že pro všechna $S \subseteq A : |N(S)| \geq 2|S|$. Ukažte, že můžeme vybrat podmnožinu hran M takovou, že každý vrchol z A je v právě dvou hranách z M a každý vrchol z B je nejvýše v jedné hraně z M.

5. *Aplikace na piškvorky.* Zobecněné piškvorky na čtverečkovém papíru jsou dané množinou $\mathcal{V}$ vyhrávajících linií (každá vyhrávající linii je množina políček). Předpokládejme, že každá vyhrávající linie má alespoň 10 políček a každé políčko je v nejvýše pěti vyhrávajících linií. Ukažte, že za těchto podmínek má druhý hráč neprohrávající strategii.