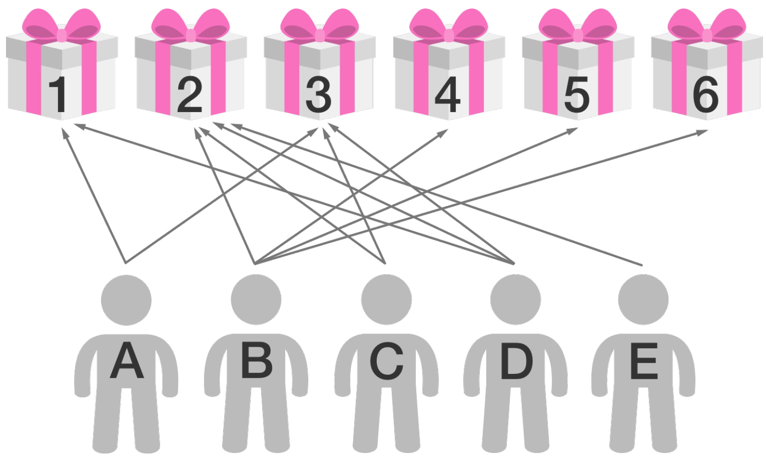
1. CVIČENÍ Z KG 2, PONDĚLÍ 13.2 14:00

Párování

1. *Rozcvička.* Ukažte, že následující bipartitní graf nemá párování, které pokryje (přiřadí dárek) všem lidem A-E.



2. *Opakování.*

- Jak najít největší párování v bipartitním grafu?
- Dokažte Königovu-Egerváryho větu:

Theorem 1 (König '31, Egerváry '31)**.** *V bipartitním grafu je velikost nejmenšího vrcholového pokrytí rovna velikosti největšího párování.*

3. *Kombinace dvou párování.* Mějme bipartitní graf $G = (A \cup B, E)$. Předpokládejme, že existuje párování M_A, které pokryje množinu $X_A \subseteq A$, a jiné párování M_B, které pokryje množinu $X_B \subseteq B$. Najděte párování, které pokryje množinu $X_A \cup X_B$.

4. *Změna párování a zlepšující cesty.* Nechť M a M' jsou párování v grafu G tž. M' vznikne z M prohozením hran na střídavé cestě *sudé* délky. Ukažte, že v G existuje volná střídavá cesta vůči M právě když taková cesta existuje vůči M'.

5. *Existence zlepšující cesty.* Dokažte, že párování je největší právě tehdy, když neexistuje volná střídavá cesta.

6. *Polygony.* Dostali jsme dva čtverce papíru o obsahu přesně 2023, oba rozdělené na 2023 mnohoúhelníků o jednotkovém obsahu Rozdělení na mnohoúhelníky může být na každém papíře různé. Položíme papíry na sebe a chceme je propíchnout 2023 krát tak, abychom propíchli vnitřek každého mnohoúhelníku na obou papírech (4046 propíchnutí by bylo triviální, stačilo by vzít propíchat každý papír zvlášť).

7. *Zobecněný Hall pro dva reprezentanty.* Mějme bipartitní graf $G = (A \cup B, E)$ a předpokládejme, že pro všechna $S \subseteq A : |N(S)| \geq 2|S|$. Ukažte, že můžeme vybrat podmnožinu hran M takovou, že každý vrchol z A je v právě dvou hranách z M a každý vrchol z B je nejvýše v jedné hraně z M.