MATEMATICKÉ DOVEDNOSTI: DŮKAZY

přímo, nepřímo (obměnou), sporem či indukcí

Důkazy indukcí:

1. Pro každé přirozené $n \geq 4$ platí $2^n \leq n!$.

2. Fibonacciho posloupnost (F_i) je definovaná následovně: $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ a $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ pro $n > 1$. Dokažte:
a) $\sum_{i=1}^{n} F_i = F_{n+2} - 1$
b) $\frac{1{,}6^n}{3} < F_n < 1{,}7^n$ pro $n > 0$
c) F_n a F_{n+1} jsou nesoudělná.

3. Nechť $a_0 = 1, a_1 = 2$ a $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n$ pro $n = 0, 1, 2, \ldots$. Potom $a_n = n + 1$.

4. Dokažte, že pro každé $n \geq 0$ dělí n přímek rovinu na nejvýše $\frac{n(n+1)}{2} + 1$ částí.

5. Pro každé $n \geq 1$ platí

$$s_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} < 1 \; .$$

6. Každé přirozené číslo větší rovné dvěma má prvočíselného dělitele.

Další důkazy přímo, nepřímo (obměnou) či sporem:

7. *Rozcvička:* Pro libovolná reálná čísla a, b platí nerovnost $a^2 + b^2 >= 2ab$.

8. *Z minula:* Pro libovolné celé n platí, že $n^3 - n$ je dělitelné třemi. (Bonus: $n^7 - n$ je dělitelné sedmi.)

9. *Z minula:* Pro libovolná celá čísla n a m dokažte, že n a m jsou obě lichá právě tehdy, když $n \cdot m$ je liché.

10. Existuje nekonečně mnoho prvočísel.

11. Pokud a, b a c jsou lichá čísla, pak rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ nemá žádné celočíselné řešení.

(Těžší varianta: taková rovnice nemá ani žádné *racionální* řešení.)

12. Každé liché celé číslo lze zapsat jako rozdíl druhých mocnin dvou celých čísel.

13. Je-li číslo zapsané v desítkové soustavě pomocí samých jedniček prvočíslo, počet použitých jedniček je také prvočíslo. (Platí opačná implikace?)