Opravné domácí úkoly z matematických dovedností, ZS 21/22.

1. Negujte následující výrok a vyhodnoťte jeho pravdivost, t.j. rozhodněte (a zdůvodněte), zda je pravdivý původní výrok nebo je pravdivá jeho negace. [3 body]

$$\exists a \in \mathbb{R}\, \forall \varepsilon > 0\, \forall \alpha \in \mathbb{R}\, \forall x \in \mathbb{R} : (x \in (a, a+\varepsilon) \Leftrightarrow |x - \alpha| < 1)$$

2. Předpokládejme, že pro množinu A platí výrok $\exists x \in A : P(x)$. Rozhodněte, který z následujících výroků musí platit. Jak je to v případě, že platí $\forall x \in A : P(x)$? [2 body]

   a) $\forall B \subseteq A\, \forall x \in B : P(x)$
   b) $\forall B \subseteq A\, \exists x \in B : P(x)$
   c) $\exists B \subseteq A\, \forall x \in B : P(x)$
   d) $\exists B \subseteq A\, \exists x \in B : P(x)$

3. Najděte formule P a Q takové, že výrok

$$\forall a \in \mathbb{N}\, \exists b \in \mathbb{N}\, \forall c \in \mathbb{N} : P(a,b) \vee Q(b,c)$$

   je **nepravdivý** a výrok

$$\forall a \in \mathbb{N}\, \forall c \in \mathbb{N}\, \exists b \in \mathbb{N} : P(a,b) \vee Q(b,c)$$

   je **pravdivý**. (Formule je například „$a > b$“ nebo „$3|(b+c)$“.) Zdůvodněte. [2 body]

4. Zapište následující množiny matematickým výrazem: [2×2 body]

   a) Množinu všech prvků, které se vyskytují v právě jedné z daných $n \geq 1$ množin $M_1, M_2, \ldots, M_n$.
   b) Množinu všech podmnožin $\mathbb{R}$, které neobsahují dvě čísla x, y taková, že x je druhou mocninou y.

5. *Bonus:* Dokažte sporem, že neexistují přirozená čísla $x \geq 1$ a $y \geq 1$ splňující $x^2 - xy = 1$. (Snažte se o korektní, přehledný a přesto stručný zápis.) [3 body]