

8. A 9. CVIČENÍ Z MATEMATICKÝCH DOVEDNOSTÍ

Množiny a operace s nimi

PŘÍKLAD PRVNÍ Kolik prvků mají následující množiny?

a) $\{a, b, c, \{a, b, c\}, \{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{\{a\}\}, \{c, b, a\}\},$

b) $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\}, \{\{\}, \{\}\}\},$

c) $\{x, y, z\} \cup \{z, y, x\} \cup \{x, \{y, z\}\} \cup \{\{y\} \cup \{z\}\},$

d) $\{1\} \cup \{1, 1\} \cup \{1, \{1\}, 1\} \cup \{1, \{1, 1\}, 1\} \cup \{1, \{1, \{1\}, 1\}, 1\}.$

PŘÍKLAD DRUHÝ Vyjádřete velikost $|A \cup B|$, $|A \times B|$ a $|\mathcal{P}(A)|$ pomocí $|A|$, $|B|$ a $|A \cap B|$.

PŘÍKLAD TŘETÍ Které z následujících výroků jsou pravdivé?

a) $x \in \{x\}$

b) $\emptyset = \{\emptyset\}$

c) $\emptyset \in \{\emptyset\}$

d) $\emptyset = \mathcal{P}(\emptyset)$

PŘÍKLAD ČTVRTÝ Které z následujících množin jsou si rovny:

a) $A \cup (B \cap C)$

b) $A \cap (B \cup C)$

c) $(A \cup B) \cap (A \cup C)$

d) $(A \cap B) \cup (A \cap C)$

e) $A \setminus B$

f) $(B \cup C) \setminus A$

g) $(B \setminus A) \cup (C \setminus A)$

h) $(A \setminus B) \setminus (B \setminus C)$

PŘÍKLAD PÁTÝ Nechť $A = \{\clubsuit, \spadesuit, \diamond, \heartsuit\}$.

a) Zapište množinovým zápisem, nikoli však výčtem prvků, množinu B všech dvouprvkových podmnožin A , které neobsahují \heartsuit .

b) Určete velikosti následujících množin: B , $\bigcup_{k=1}^{|A|} \binom{A}{k}$, $\bigcup_{k=0}^{|A|} \{\binom{A}{k}\}$, $2^{\binom{A}{2}}$.

PŘÍKLAD ŠESTÝ Nechť A_1, A_2, \dots, A_n a B jsou libovolné množiny. Porovnejte následující dvojice množin:

a) $2^{A \setminus B}$ a $2^A \setminus 2^B$,

b) $2^{A \cup B}$ a $2^A \cup 2^B$,

c) $2^{A \cap B}$ a $2^A \cap 2^B$,

d) $\{X : X \subseteq \bigcup_i A_i\}$ a $\bigcup_i \{X : X \subseteq A_i\}$,

e) $(\bigcup_i A_i) \setminus B$ a $\bigcup_i (A_i \setminus B)$,

f) $(\bigcap_i A_i) \setminus B$ a $\bigcap_i (A_i \setminus B)$,

PŘÍKLAD SEDMÝ Jaké prvky obsahují následující množiny? (A co když sjednocení nahradíme průniky?)

a) $\bigcup_{i=1}^{10} \{j \in \mathbb{N} : j^2 \leq i\}$

b) $\bigcup_{i=1}^{10} \{j \in \mathbb{N} : j^2 < i\}$

c) $\bigcup_{i=1}^{10} \{\{j \in \mathbb{N} : j^2 \leq i\}\}$

d) $\bigcup_{i=1}^{10} \{\{j \in \mathbb{N} : j^2 < i\}\}$

e) $\{\bigcup_{i=1}^{10} \{j \in \mathbb{N} : j^2 \leq i\}\}$

PŘÍKLAD OSMÝ Správně přečtěte a vyčíslete zápisy:

a)

$$\bigcup_{I \in \binom{\{1,2,3,4\}}{3}} \bigcap_{i \in I} \{i-1, i, i+1\}$$

b)

$$\sum_{p \in \mathbb{P}, p < 10} \left| \bigcap_{i=1}^p \binom{\{i, \dots, 2p\}}{2} \right|$$

c) Necht' $\{X_1, \dots, X_6\} = \binom{\{1,2,3,4\}}{2}$, spočtěte

$$\sum_{i=1}^6 \left| \bigcup_{j \in X_i} X_j \right|.$$

PŘÍKLAD DEVÁTÝ Necht' A_1, A_2, \dots, A_n a B_1, B_2, \dots, B_n jsou libovolné množiny. Jaký je vztah mezi množinami:

$$M_1 = \bigcap_{i=1}^n (A_i \cup B_i),$$

$$M_2 = \left(\bigcap_{i=1}^n A_i \right) \cup \left(\bigcap_{i=1}^n B_i \right),$$

$$M_3 = \bigcap_{i=1}^n \left(\bigcap_{j=1}^n (A_i \cup B_j) \right).$$

PŘÍKLAD DESÁTÝ Porovnejte následující trojici množin

$$\{X : X \subseteq \mathbb{N}\}, \quad \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{X : X \subseteq \{1, \dots, n\}\}, \quad \text{a} \quad \bigcup_{k=0}^{\infty} \binom{\mathbb{N}}{k}.$$