6. CVIČENÍ Z MATEMATICKÝCH DOVEDNOSTÍ

Všechny kvantifikátory, jejich negace a nějaké vlastnosti

Příklad první Rozhodněte o pravdivosti a negujte:

1. $\forall x \in \mathbb{Z}\, \exists y \in \mathbb{Z}\, \forall z \in \mathbb{Z} : z > x \Rightarrow z > y$
2. $\exists y \in \mathbb{Z}\, \forall x \in \mathbb{Z}\, \forall z \in \mathbb{Z} : z > x \Rightarrow z > y$

Co kdybychom místo celých čísel kvantifikovali pouze přes přirozená čísla?

Příklad druhý Který z následujících dvou výroků je implikuje ten druhý?

A $\quad \forall x\, \exists K > 0 : |f(x+1) - f(x)| \leq K$

B $\quad \exists K > 0\, \forall x : |f(x+1) - f(x)| \leq K$

Příklad třetí Negujte následující výroky

a) $\forall x : (x > 0 \Rightarrow \exists y (y > 0 \wedge x > y))$

b) $\exists x : (x > 0 \wedge \forall y (y > x \wedge 0 > y))$

c) $\forall x \exists y : (x < y \wedge \forall z (x > z \Rightarrow y > z))$

d) $\forall x, y \exists z : (x > y \Rightarrow (x > z \wedge z > y))$

Příklad čtvrtý Napište obměnu implikace

a) Pokud jsou všechny ovce bílé, pak jsou všechny kočky černé.

b) $(\forall x : P(x)) \Rightarrow (\exists y : P(y))$

c) $(\forall x \exists y : y = x + 1) \Rightarrow (\exists y \forall x : y = x + 1)$

Příklad pátý „Vytýkání kvantifikátorů.“ Které z následujících dvojic výroků jsou ekvivalentní?

1. $(\forall x\, P(x)) \vee (\forall y\, Q(y))$ a $\forall x \forall y (P(x) \vee Q(y))$
2. $(\forall x\, P(x)) \wedge (\forall y\, Q(y))$ a $\forall x \forall y (P(x) \wedge Q(y))$
3. $(\forall x\, P(x)) \Rightarrow (\forall y\, Q(y))$ a $\forall x \forall y (P(x) \Rightarrow Q(y))$
4. $(\exists x\, P(x)) \vee (\exists y\, Q(y))$ a $\exists x \exists y (P(x) \vee Q(y))$
5. $(\exists x\, P(x)) \wedge (\exists y\, Q(y))$ a $\exists x \exists y (P(x) \wedge Q(y))$
6. $(\exists x\, P(x)) \Rightarrow (\exists y\, Q(y))$ a $\exists x \exists y (P(x) \Rightarrow Q(y))$

Příklad šestý Zapište matematickou formulí (beze slov a bez použití funkce minima) že $x \in \mathbb{R}$ je nejmenší z čísel, která se nacházejí v alespoň dvou množinách ze systému množin $A_1, A_2, \ldots, A_n \subseteq \mathbb{R}$.

Příklad sedmý Zapište matematickou formulí že žádné číslo x není obsažené v právě jedné z množin $A_1, A_2, \ldots, A_n \subseteq \mathbb{R}$.