# 5. CVIČENÍ Z MATEMATICKÝCH DOVEDNOSTÍ

Všechny kvantifikátory, jejich negace a nějaké vlastnosti

Příklad první  Přepište slovní tvrzení do formulí s kvantifikátory.

a) Každé číslo z množiny $A$ je sudé.
b) Množina $B$ obsahuje všechna sudá čísla.
c) Číslo $x$ je prvkem množiny $S$ právě tehdy, když je sudé.
d) Pokud množina $M$ obsahuje všechny dělitele čísla 15, pak $M$ obsahuje i všechny dělitele čísla 27.
e) Množina $M$ obsahuje právě dvě sudá a právě dvě lichá čísla.

Příklad druhý  Rozhodněte o pravdivosti následujících výroků kvantifikovaných přes celá čísla:

a) $\forall n\ \exists m : n^2 < m$
b) $\exists n\ \forall m : n < m^2$
c) $\forall n\ \exists m : n + m = 0$
d) $\exists n\ \forall m : nm = m$
e) $\exists n\ \exists m : n^2 + m^2 = 5$
f) $\exists n\ \exists m : n + m = 4 \wedge n - m = 2$
g) $\forall n\ \forall m\ \exists p : p = (m + n)/2$

Příklad třetí  Negujte následující výroky.

a) Žádný učený z nebe nespadl.
b) Každá karta má rub i líc.
c) Jestliže je něco tajemství, pak to všichni vědí.
d) Pro každé reálné $x$ existuje celé číslo $k$ takové, že $k$-tá mocnina čísla $x$ je větší než jedna.
e) Není zde nikdo takový, kdo neumí derivovat.
f) Libovolný student, který umí derivovat, umí také integrovat.
g) Jestliže každý student MFF umí derivovat, alespoň jeden absolvent MFF umí integrovat.
h) Žádný neví, kde je S2 (v budově MFF UK na Malé Straně).
i) Existuje student nebo absolvent MFF UK, který chodil na přednášku do posluchárny S2.
j) Každé přirozené číslo $x$ má nějakého dělitele, který není dělitelem žádného jiného čísla než $x$.
k) Každý kdo je modrý, je šmoula, a existuje šmoula, který je modrý.

Příklad čtvrtý  Rozhodněte o pravdivosti a negujte:

1. $\forall x \in \mathbb{Z}\, \exists y \in \mathbb{Z}\, \forall z \in \mathbb{Z} : z > x \Rightarrow z > y$
2. $\exists y \in \mathbb{Z}\, \forall x \in \mathbb{Z}\, \forall z \in \mathbb{Z} : z > x \Rightarrow z > y$

Co kdybychom místo celých čísel kvantifikovali pouze přes přirozená čísla?

Příklad pátý Který z následujících dvou výroků je implikuje ten druhý?

A $\forall x\ \exists K > 0 : |f(x+1) - f(x)| \leq K$

B $\exists K > 0\ \forall x : |f(x+1) - f(x)| \leq K$

Příklad šestý „Vytýkání kvantifikátorů.“ Které z následujících dvojic výroků jsou ekvivalentní?

1. $(\forall x\, P(x)) \vee (\forall y\, Q(y))$ a $\forall x \forall y (P(x) \vee Q(y))$
2. $(\forall x\, P(x)) \wedge (\forall y\, Q(y))$ a $\forall x \forall y (P(x) \wedge Q(y))$
3. $(\forall x\, P(x)) \Rightarrow (\forall y\, Q(y))$ a $\forall x \forall y (P(x) \Rightarrow Q(y))$
4. $(\exists x\, P(x)) \vee (\exists y\, Q(y))$ a $\exists x \exists y (P(x) \vee Q(y))$
5. $(\exists x\, P(x)) \wedge (\exists y\, Q(y))$ a $\exists x \exists y (P(x) \wedge Q(y))$
6. $(\exists x\, P(x)) \Rightarrow (\exists y\, Q(y))$ a $\exists x \exists y (P(x) \Rightarrow Q(y))$