4. CVIČENÍ Z MATEMATICKÝCH DOVEDNOSTÍ

Kvantifikátory

Příklad první Pro $X = \{1, 2, 3\}$ a nějaké číslo a přepište následující výroky s kvantifikátory bez kvantifikátorů.

$A = \forall x \in X : x > a$
$B = \exists x \in X : x > a$

Implikuje jeden z výroků ten druhý? Pro které hodnoty a je pravdivý první výrok a pro které druhý? Negujte oba dva výroky.

Příklad druhý Přepište slovní tvrzení do formulí s kvantifikátory. Pokud není uvedena doména, použijte množinu všech přirozených čísel.

a) Žádné číslo z množiny M není větší než 57.
b) Pro každé číslo z množiny Y platí, že pokud je sudé, potom jeho trojnásobek je také sudý.
c) Existuje číslo, které je aspoň tak velké jako všechna čísla z množiny X.
d) Pokud každé sudé číslo patří do množiny M, pak žádné sudé číslo nepatří do množiny N.
e) Pro každé číslo z množiny A a každé číslo z množiny B platí, že jejich součin je 16.
f) Pro žádné číslo z množiny C a žádné číslo z množiny D neplatí, že jejich součin je 7.
g) Existuje číslo, jehož každý dělitel je menší než 523.
h) Každé číslo x má nějakého dělitele, který není dělitelem žádného jiného čísla než x.
i) Pro každé číslo y existuje číslo z množiny K, které je větší než y a které není dělitelné žádným číslem z množiny L.

Příklad třetí Následující výroky jsou kvantifikované přes doménu reálných čísel s omezující podmínkou:

a) $\forall x < 0 : x^2 > 0$, b) $\forall y \neq 0 : y^3 \neq 0$, c) $\exists z > 0 : z^2 = 2$.

Přepište je tak, aby byly kvantifikované přes všechna reálná čísla.

Příklad čtvrtý Rozhodněte o pravdivosti následujících výroků kvantifikovaných přes celá čísla:

a) $\forall n \, \exists m : n^2 < m$
b) $\exists n \, \forall m : n < m^2$
c) $\forall n \, \exists m : n + m = 0$
d) $\exists n \, \forall m : nm = m$
e) $\exists n \, \exists m : n^2 + m^2 = 5$
f) $\exists n \, \exists m : n + m = 4 \wedge n - m = 2$
g) $\forall n \, \forall m \, \exists p : p = (m + n)/2$

Příklad pátý Rozhodněte o pravdivosti a negujte:

1. $\forall x \in \mathbb{Z}\, \exists y \in \mathbb{Z}\, \forall z \in \mathbb{Z} : z > x \Rightarrow z > y$
2. $\exists y \in \mathbb{Z}\, \forall x \in \mathbb{Z}\, \forall z \in \mathbb{Z} : z > x \Rightarrow z > y$

Co kdybychom místo celých čísel kvantifikovali pouze přes přirozená čísla?