3. CVIČENÍ Z MATEMATICKÝCH DOVEDNOSTÍ

Negace, obměny, ekvivalence, úvod do kvantifikátorů

Příklad první Negujte následující výroky. Lze nějaký z nich zjednodušit? (Zjednodušení je kratší ekvivalentní výrok)

a) $(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
b) $(A \wedge B) \Rightarrow (C \vee D)$
c) $(A \wedge B) \vee (B \Rightarrow C)$
d) $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (C \Rightarrow D)$
e) $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \vee ((C \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A))$
f) $((A \wedge B) \Rightarrow (C \vee D)) \wedge ((C \wedge D) \Rightarrow (A \vee B))$
g) $(A \wedge B) \vee (\neg B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge C)$

Příklad druhý Rozhodněte, které z následujících výroků jsou ekvivalentní.

a) $A \Rightarrow B$	d) $\neg A \vee B$	g) $\neg B \Rightarrow \neg A$
b) $B \Rightarrow A$	e) $A \Leftrightarrow B$	h) $\neg(A \wedge \neg B)$
c) $A \wedge B$	f) $\neg(B \Rightarrow \neg A)$	i) $\neg A \Leftrightarrow \neg B$

Příklad třetí Proveďte obměnu implikací.

a) Jestliže prší, jsou ulice mokré.
b) Jestliže je dnes státní svátek, nemusím do školy.
c) Pokud chodím na přednášky z DM a na přednášky z LA, potom nejsou přednášky z DM a LA ve stejnou dobu.
d) Pokud je x sudé číslo nebo je y sudé číslo, pak je součin $x \cdot y$ sudý.
e) Jestliže je $x > 1$, je $x^2 > x$.
f) Je-li p prvočíslo, je číslo $p^2 - 1$ složené.

Příklad čtvrtý Nechť $S(x), L(x)$ jsou výroky označující sudost, resp. lichost, celého čísla x, tedy např. $S(x)$ označuje výrok „x je sudé“. Negujte následující tvrzení a rozhodněte, zda jsou v oboru celých čísel pravdivá

$A = S(x) \Rightarrow L(x+1)$
$B = S(x) \Rightarrow (L(x^2) \vee L(x^3))$
$C = (S(x) \vee S(y)) \Rightarrow S(x+y)$
$D = ((S(x) \wedge L(y)) \vee (S(x) \wedge L(z)) \Rightarrow (L(x+y) \vee L(y+z))$
$E = (S(x) \vee L(x^2)) \wedge (S(x+y) \Rightarrow S(x^2+y^2))$

Příklad pátý Které kvantifikátory vyjadřují slova:
všichni, existuje, každý, žádný, libovolný, alespoň jeden, nikdo, někdo?

Příklad šestý Pro $X = \{1, 2, 3\}$ a nějaké číslo a přepište následující výroky s kvantifikátory bez kvantifikátorů.

$A = \forall x \in X : x > a$
$B = \exists x \in X : x > a$

Implikuje jeden z výroků ten druhý? Pro které hodnoty a je pravdivý první výrok a pro které druhý? Negujte oba dva výroky. Uvažujte výroky a jejich negace pro $X = \emptyset$. Určete pro které hodnoty a jsou výroky pravdivé.

Příklad sedmý Přepište slovní tvrzení do formulí s kvantifikátory. Pokud není uvedena doména, použijte množinu všech přirozených čísel.

a) Žádné číslo z množiny M není větší než 57.
b) Pokud množina M obsahuje všechny dělitele čísla 15, pak M obsahuje i všechny dělitele čísla 27.
c) Pro každé číslo z množiny Y platí, že pokud je sudé, potom jeho trojnásobek je také sudý.
d) Existuje číslo, které je aspoň tak velké jako všechna čísla z množiny X.
e) Pokud každé sudé číslo patří do množiny M, pak žádné sudé číslo nepatří do množiny N.
f) Pro každé číslo z množiny A a každé číslo z množiny B platí, že jejich součin je 16.
g) Pro žádné číslo z množiny C a žádné číslo z množiny D neplatí, že jejich součin je 7.
h) Existuje číslo, jehož každý dělitel je menší než 523.
i) Každé číslo x má nějakého dělitele, který není dělitelem žádného jiného čísla než x.
j) Pro každé číslo y existuje číslo z množiny K, které je větší než y a které není dělitelné žádným číslem z množiny L.

Příklad osmý Na rozmyšlení na doma: Najděte formule (výroky složené z A, B) s odpovídajícími pravdivostními hodnotami (výzva: používejte jen negaci a konjunkci, nebo jen negaci a implikaci, apod.).

A	B								
0	0	0	0	0	0	1	0	0	1
0	1	0	0	0	1	0	0	1	0
1	0	0	0	1	0	0	1	0	0
1	1	0	1	0	0	0	1	1	1

A	B								
0	0	0	1	1	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	0	1	1	1
1	0	1	1	0	1	1	0	1	1
1	1	0	0	0	1	1	1	0	1