5. DOMÁCÍ ÚKOL Z LINEÁRNÍ ALGEBRY I.

Lineární zobrazení

Odevzdávejte emailem na `vesely+la@iuuk.mff.cuni.cz` *(pokud posíláte obrázky, prosím o velikost max.* $0,5$ *MB na obrázek); osobní odevzdání řešení na papíře je také možné, pokud mě zastihnete v kanceláři S323 na Malé Straně. Termín: středa* ***9.2.2022****. Svá tvrzení odůvodněte, můžete však používat tvrzení z přednášky či cvičení. Ke svému jménu prosím* ***napište, na jaké cvičení chodíte****.*

Příklad první Rozhodněte, zda následující matice A, B mohou být maticí přechodu v prostoru $\mathbb{R}^n$ pro vhodné báze:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ -7 & 9 & 13 & 14 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Pokud ano, najděte příklady bází, mezi kterými je tato matice maticí přechodu.
[3 body]

Příklad druhý Mějme vektorové prostory U s bází B_U a V s bází B_V nad tělesem $\mathbb{R}$. Dále máme maticemi zadané lineární zobrazení ${}_{B_V}[id]_{B_U}$, ${}_{B_U}[id]_{B_V}$, ${}_{B_U}[f]_{B_U}$ (pro nějaké lineární zobrazení $f : U \to V$).

Pomocí skládání zadaných zobrazení vytvořte následující lineární zobrazení:

a) ${}_{B_V}[f]_{B_V}$
b) ${}_{B_U}[f]_{B_V}$
c) ${}_{B_U}[id]_{B_U}$

Lze v některém případě říct, o jakou matici jde?
[3 body]

Příklad třetí Mějme vektorové prostory U, V, W nad tělesem $\mathbb{R}$. Mějme lineární zobrazení $f\colon U \to V$ a $g\colon V \to W$ daná následujícími maticemi ${}_{B_W}[g]_{B_V} = G$ a ${}_{B_V}[f]_{B_U} = F$.

$$G = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Báze vektorových prostorů jsou:

$$\begin{aligned} B_U &= \{-x^2+3,\, 2x^2-2x+2,\, x-3\}, \\ B_V &= \{(-2,1,3)^T,\, (1,-2,1)^T,\, (1,0,-1)^T\}, \\ B_W &= \{(0,2,-1)^T,\, (2,-1,1)^T,\, (-2,1,-2)^T\}. \end{aligned}$$

1. Určete bázi a dimenzi jádra matice složeného zobrazení $\mathrm{Ker}(g \circ f)$.
2. Určete bázi a dimenzi obrazu složeného zobrazení $(g \circ f)(U)$.
3. Rozhodněte, zda složené zobrazení $g \circ f$ je prosté.
4. Rozhodněte, zda složené zobrazení $g \circ f$ je „na“.

[5 bodů]

PŘÍKLAD ČTVRTÝ Najděte isomorfismus mezi $\{v \in \mathbb{R}^4 \mid (1,2,3,4)v = 0\}$ a $\left\{A \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid A^T = A\right\}$. ($(1,2,3,4)v$ je součin řádkového a sloupcového vektoru z $\mathbb{R}^4$.)
[3 body]

PŘÍKLAD PÁTÝ Vytvořte mapu mysli, tedy diagram témat a pojmů probíraných v semestru, doplněný o jejich vzájemné vztahy, tak jak je chápete. (Ačkoliv témata nutně probíráme v lineárním pořadí, ve skutečnosti všechny spolu úzce souvisí.) Viz `https://cs.wikipedia.org/wiki/My%C5%A1lenkov%C3%A1_mapa`
Můžete ji nakreslit na (velkém) papíře nebo vytvořit na počítači — na počítači lze např. použít nástroj OrgPad (`https://orgpad.com/`), ve kterém lze vytvářet libovolné, tedy nejen stromové diagramy a průběžně je upravovat, nebo Freemind, který je omezen na stromové uspořádání.
U tohoto úkolu je nutné osobní předvedení, ale můžete dostat až 10 bodů dle provedení.