3. DOMÁCÍ ÚKOL Z LINEÁRNÍ ALGEBRY I.

Vektorové prostory a podprostory

Odevzdávejte na papíře na začátku cvičení (preferuji místo naskenování/nafocení řešení) nebo odesláním řešení na email `vesely+la@iuuk.mff.cuni.cz` *Termín:* ***13.12.2021 10:40****. Svá tvrzení odůvodněte, můžete však používat tvrzení z přednášky či cvičení. Ke svému jménu prosím* ***napište, na jaké cvičení chodíte****, a můžete připojit i přezdívku, která se objeví v tabulce bodů, až ji aktualizuji.*

PŘÍKLAD PRVNÍ Buď X libovolná množina. Dokažte, že pokud definujeme součet dvou podmnožin jako jejich symetrickou diferenci, tak podmnožiny X tvoří vektorový prostor nad $\mathbb{Z}_2$ (násobení prvky ze $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ dle axiomů vektorového prostoru nebo vlastností dokázaných na přednášce).

[2 body]

PŘÍKLAD DRUHÝ Nad $\mathbb{Z}_5$ spočtěte průnik

$$\mathrm{span}\{(1,4,4)^T, (2,3,4)^T\} \cap \mathrm{span}\{(1,1,4)^T, (2,4,0)^T\}\,.$$

(Oba lineární obaly jsou podprostory $\mathbb{Z}_5^3$.) Kolik obsahuje vektorů?

[3 body]

PŘÍKLAD TŘETÍ Nechť $\mathbb{R}^{2\times 2}$ je vektorový prostor reálných matic velikosti 2×2 nad $\mathbb{R}$. Nechť S je množina reálných symetrických matic velikosti 2×2.

1. Ukažte, že S je podprostor $\mathbb{R}^{2\times 2}$.
2. Nalezněte bázi S (a ukažte o ní, že to je skutečně báze).
3. Jaká je dimenze S?

[3 body]

PŘÍKLAD ČTVRTÝ Najděte bázi prostoru $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^5 : x_1 + x_3 = x_2 + 2x_4 = x_5\}$ (tedy podprostoru $\mathbb{R}^5$ daného těmito dvěma rovnicemi). Jaká je jeho dimenze?

[3 body]

PŘÍKLAD PÁTÝ *Ještě trochu konečných těles, pokud si je chcete procvičit:*

Invertujte matici $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ nad tělesy $\mathbb{Z}_7$ a $\mathbb{Z}_{11}$.

[2 body]