13. CVIČENÍ Z LINEÁRNÍ ALGEBRY I.

Lineární zobrazení: matice zobrazení a přechodu, obraz, jádro, isomorfismus

PŘÍKLAD PRVNÍ Pro $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dané přepisem $f(x,y) = (x+y,\, x-y)^T$ vypočtěte matici tohoto lineárního zobrazení (vůči kanonické bázi).

PŘÍKLAD DRUHÝ Vypočtěte matici lineárního zobrazení $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, které po řadě zobrazí vektory:

$$\begin{aligned} f((-1,-3,1)^T) &= (-1,1,0)^T, \\ f((0,3,-2)^T) &= (0,1,-1)^T, \\ f((-1,-2,2)^T) &= (1,0,1^T). \end{aligned}$$

PŘÍKLAD TŘETÍ Mějme následující dvě báze prostoru $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned} B_U &= \{x_1 = (-1,0,3)^T,\, x_2 = (2,-2,2)^T,\, x_3 = (0,1,-3)^T\}, \\ B_V &= \{y_1 = (-1,1,0)^T,\, y_2 = (0,1,-1)^T,\, y_3 = (1,0,1)^T\}. \end{aligned}$$

Určete matici přechodu od báze B_U k bázi B_V, tedy ${}_{B_V}[id]_{B_U}$.

PŘÍKLAD ČTVRTÝ Mějme dánu matici linárního zobrazení $f : U \to V$ vzhledem k bázím B_1, B_2, tedy ${}_{B_2}[f]_{B_1}$, a mějme dány báze B_3, B_4 prostorů U, V. Navrhněte postup, jak najít matici f vzhledem k bázím B_3, B_4, tedy ${}_{B_4}[f]_{B_3}$.

PŘÍKLAD PÁTÝ Zdůvodněte, že vektorový prostor V je izomorfní vektorovému prostoru W (oba nad $\mathbb{R}$) a najděte izomorfismus.

$$V := \operatorname{span}\{(1,3,2,1)^T, (0,0,1,1)^T\}$$

$$W := \operatorname{span}\{(1,0,0,0)^T, (0,0,0,1)^T\}$$

PŘÍKLAD ŠESTÝ Pro zobrazení $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dané předpisem

$$f(x,y,z) = (x+y-2z,\, y-z,\, x-y)^T$$

určete dimenze jádra a obrazu a rozhodněte, zda je isomorfismem $\mathbb{R}^3$ na sebe sama (takzvaným automorfismem).

PŘÍKLAD SEDMÝ *Trochu dokazování:* Nechť $f\colon U \to V$, $g\colon V \to W$ jsou isomorfismy vektorových prostorů. Dokažte, že $g \circ f\colon U \to W$ je také isomorfismus vektorových prostorů (tedy že isomorfismus jako relace mezi vektorovými prostory je ekvivalence). Speciálně ukažte, že:

1. Jsou-li f, g prostá, pak $g \circ f$ je prosté.
2. Jsou-li f, g „na“, pak $g \circ f$ je „na“.