10. CVIČENÍ Z LINEÁRNÍ ALGEBRY I.

Maticové prostory a podprostory

Z minula:

PŘÍKLAD PRVNÍ Souřadnice vektoru u vůči bázi $X = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ jsou $[u]_X = (a_1, a_2, a_3, a_4)^T$. Určete souřadnice téhož vektoru u vůči bázi $Y = \{v_1 + v_4,\ v_2 + v_3,\ v_4,\ v_2\}$.

Početní příklady na maticové prostory:

PŘÍKLAD DRUHÝ Postupně nad tělesy $\mathbb{R}$ a $\mathbb{Z}_5$ rozhodněte, zda pro matici $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ platí

1. $(1, 2)^T \in \mathrm{Ker}(A)$,
2. $(1, 2)^T \in \mathcal{S}(A)$.

PŘÍKLAD TŘETÍ Najděte báze prostorů $\mathcal{R}(A)$, $\mathcal{S}(A)$ a $\mathrm{Ker}(A)$ nad $\mathbb{R}$ pro matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 6 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Trocha dokazování / vyvracení:

PŘÍKLAD ČTVRTÝ Rozhodněte, zda platí $\mathrm{rank}(A + B) \leq \mathrm{rank}(A) + \mathrm{rank}(B)$ pro $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$.
(Hint: Jaký je vztah mezi $\mathcal{S}(A) + \mathcal{S}(B)$ a $\mathcal{S}(A + B)$?)

PŘÍKLAD PÁTÝ Jaký je vztah mezi prostory $\mathrm{Ker}(AB)$ a $\mathrm{Ker}(B)$ pro matice

1. $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$,
2. $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ regulární, $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$?

PŘÍKLAD ŠESTÝ Buďte U, V podprostory W a nechť $\dim U = 7$, $\dim V = 8$, $\dim W = 13$.

a) Odhadněte zdola a shora hodnotu $\dim(U + V)$ a najděte příklad, kdy se nabudou tyto meze.
b) Odhadněte zdola a shora hodnotu $\dim(U \cap V)$.