10. CVIČENÍ Z LINEÁRNÍ ALGEBRY I.

Vektorové (pod)prostory, lineární kombinace, obaly, (ne)závislost, generátory, báze, dimenze, ...

Příklad první Nechť u, v, w jsou lineárně nezávislé vektory z vektorového prostoru V nad $\mathbb{R}$. Rozhodněte, zdali jsou následující množiny lineárně závislé či nezávislé.

a) $\{u,\, u+v,\, u+w\}$.
b) $\{u-v,\, u-w,\, v-w\}$.

Příklad druhý Buďte U, V podprostory prostoru W. Dokažte, že $U \cap V = \{o\}$ právě tehdy, když každý vektor $x \in U+V$ se dá jednoznačně zapsat jako $x = u+v$, kde $u \in U$, $v \in V$.

Příklad třetí *Bázická rozcvička:* Najděte bázi prostoru $\mathbb{R}^4$ obsahující vektor $(1,2,3,4)^T$.

Příklad čtvrtý Rozhodněte, zda vektory $(1,2,1)^T, (2,5,1)^T, (3,2,1)^T$ tvoří bázi prostoru $\mathbb{R}^3$ nad $\mathbb{R}$, a pokud ano, najděte souřadnice vektoru $v = (5,1,2)^T$ vzhledem k této bázi.

Příklad pátý Doplňte množinu M na bázi vektorového prostoru V.

a) $M = \left\{(1,2,0,0)^T, (2,1,1,3)^T, (0,1,0,1)^T\right\}$, $V = \mathbb{R}^4$.
b) $M = \left\{-x^2,\, x+x^2,\, x^3-1\right\}$, V je prostor reálných polynomů stupně nejvýše tři.

Příklad šestý Určete bázi a dimenzi podprostoru $\mathbb{R}^6$ daného soustavou rovnic (nad $\mathbb{R}$):

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 + 4x_5 + x_6 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_4 + x_5 &= 0. \end{aligned}$$

Příklad sedmý Souřadnice vektoru u vůči bázi $X = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ jsou $[u]_X = (a_1, a_2, a_3, a_4)^T$. Určete souřadnice téhož vektoru u vůči bázi $Y = \{v_1 + v_4,\, v_2 + v_3,\, v_4,\, v_2\}$.