9. CVIČENÍ Z LINEÁRNÍ ALGEBRY I.

Vektorové prostory: lineární kombinace, obaly, (ne)závislost, generátory, etc.

Příklad první Zjistěte, zda se vektor v dá získat jako lineární kombinace vektorů z množiny A nad tělesem T, tedy jestli $v \in \operatorname{span}(A)$:

a) $v = (6, 5, -4)^T$, $A = \{(4, 1, -2)^T, (1, 2, -1)^T, (3, 4, -1)^T\}$ a $T = \mathbb{R}$,
b) $v = (i, -1)^T$, $A = \{(1, i)^T, (i, 1 - i)^T\}$ a $T = \mathbb{C}$,
c) $v = (7, -2, \lambda)^T$, $A = \{(2, 3, 1)^T, (1, -6, 8)^T, (5, 7, 3)^T\}$ a $T = \mathbb{R}$ (v závislosti na $\lambda \in \mathbb{R}$).

Příklad druhý Zjistěte, zda jsou následující vektory v daném vektorovém prostoru lineárně závislé nebo nezávislé:

a) $(2, 0, 3), (1, -1, 1), (0, 2, 1)$ v $\mathbb{R}^3$,
b) $(0, 1, 1, 1), (1, 0, 1, 1), (1, 1, 0, 1), (1, 1, 1, 0)$ v $\mathbb{R}^4$ a v $\mathbb{Z}_3^4$,

Příklad třetí Nechť u, v, w jsou lineárně nezávislé vektory z vektorového prostoru V nad $\mathbb{R}$. Rozhodněte, zdali jsou následující množiny lineárně závislé či nezávislé.

a) $\{u,\ u + v,\ u + w\}$.
b) $\{u - v,\ u - w,\ v - w\}$.

Příklad čtvrtý Buďte U, V podprostory prostoru W. Dokažte, že $U \cap V = \{o\}$ právě tehdy, když každý vektor $x \in U + V$ se dá jednoznačně zapsat jako $x = u + v$, kde $u \in U$, $v \in V$.

Na rozmyšlení:

Příklad pátý Vyjádřete $7x - 7$ jako lineární kombinaci polynomů $x^2 + x, x + 2$ a $x^2 - x + 3$ nad $\mathbb{R}$.

Příklad šestý Uvažme vektorový prostor všech funkcí z $\mathbb{N}$ do $\mathbb{Z}_2$. Pro $i \in \mathbb{N}$ buď a_i funkce, která prvek i zobrazí na 1 a vše ostatní na 0. Buď b funkce, která vše zobrazí na jedničku. Leží b v lineárním obalu $\operatorname{span}\{a_i, i \in \mathbb{N}\}$?