8. CVIČENÍ Z LINEÁRNÍ ALGEBRY I.

Tělesa a úvod do vektorových prostorů

Příklad první   Vyjádřete jako prvky daného tělesa výrazy:

a) $6+7$, -7 a $6\cdot 7$ v tělese $\mathbb{Z}_{11}$
b) $((2^{-1}+1)4)^{-1}$ a $4/3$ v tělese $\mathbb{Z}_5$,
c) 7^{-1} a $6/7$ v tělese $\mathbb{Z}_{11}$.
d) 3^{2021} v tělese $\mathbb{Z}_7$

Příklad druhý   Nad $\mathbb{Z}_5$ najděte množinu všech řešení soustavy rovnic

$$\begin{aligned} 3x+2y+z &= 1, \\ 4x+y+3z &= 3 \end{aligned}$$

a spočítejte její mohutnost.

Příklad třetí   Tvoří všechny polynomy proměnné X s koeficienty nad $\mathbb{Z}_3$ stupně nejvýše 10 vektorový prostor? Kolik má tento prostor prvků?

Příklad čtvrtý   Rozhodněte, pro která $a \in \mathbb{Z}_7$ tvoří množina

$$S_a = \{(x,y,z)^T : x+2y-3z = a\}$$

vektorový podprostor $\mathbb{Z}_7^3$. Kolik má tento vektorový podprostor prvků?

Příklad pátý   Zjistěte, zda se vektor v dá získat jako lineární kombinace vektorů z množiny A nad tělesem T:

a) $v=(6,5,-4)^T$, $A=\{(4,1,-2)^T,(1,2,-1)^T,(3,4,-1)^T\}$ a $T=\mathbb{R}$,
b) $v=(i,-1)^T$, $A=\{(1,i)^T,(i,1-i)^T\}$ a $T=\mathbb{C}$,
c) $v=(7,-2,\lambda)^T$, $A=\{(2,3,1)^T,(1,-6,8)^T,(5,7,3)^T\}$ a $T=\mathbb{R}$ (v závislosti na $\lambda\in\mathbb{R}$).

Bonusové na rozmyšlení:

Příklad šestý   Zkuste vymyslet, jak jednoduše najít inverzní prvek k prvku $a \neq 0$ v tělese $\mathbb{Z}_p$ (pro prvočíselné p).

Příklad sedmý   Najděte těleso, které má právě 4 prvky. Dokažte, že je to těleso dle definice tělesa.