4. CVIČENÍ Z LINEÁRNÍ ALGEBRY I.

Operace s maticemi

Příklad první Buď

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 5 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Spočítejte (kdykoliv má výraz smysl):

a) $(A + 4B) + C$
b) $(A + B)^T \cdot 2C$
c) $(B \cdot C) \cdot A^T$
d) $(B \cdot 3A^T) + C$
e) $C \cdot (B^T - (\pi A)^T)$

Příklad druhý Dokažte, nebo vyvraťte následující vztahy pro reálná čísla α a β a matice A, B a C typu $n \times n$:

a) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$
b) $\alpha A + \beta B = (\alpha + \beta)(A + B)$
c) $(A + B)^T = A^T + B^T$
d) $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$
e) $A^T A$ je symetrická
f) $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$

Příklad třetí Najděte všechny matice, které komutují s maticí $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Příklad čtvrtý Pro libovolnou nesymetrickou čtvercovou matici A zkonstruujte symetrickou matici B tak, že jejich součin nekomutuje, tj. $AB \neq BA$.

Komutuje součin matic, pokud jsou obě matice symetrické?

Příklad pátý Dokažte nebo vyvraťte:

1. Nechť $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Pokud A je symetrická a komutuje s B, pak A komutuje s B^T.
2. Nechť $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Pokud A komutuje s B, pak A komutuje s B^T.

Příklad šestý Rozmyslete si, kdy je trojúhelníková matice regulární.

(Připomeňme, že horní trojúhelníková matice A má libovolné hodnoty na diagonále a nad ní, ale pod diagonálou jsou samé nuly. Formálně: $a_{ij} = 0 \ \forall i > j$. Dolní trojúhelníková matice to má naopak.)