

1. DOMÁCÍ ÚKOL Z LINEÁRNÍ ALGEBRY I.

Matice

Odevzdávejte emailem na vesely@iuuk.mff.cuni.cz nebo na papíře na začátku cvičení do 9.11. 12:20. Svá tvrzení odůvodněte, můžete však používat věty z přednášky či cvičení.

PŘÍKLAD PRVNÍ Popište všechna řešení (x, y, z) soustavy rovnic v závislosti na parametrech a, b :

$$\begin{aligned}x - ay - 2z &= 1 \\x + (1 - a)y &= b - 3 \\x + (1 - a)y + az &= 2b - 1\end{aligned}$$

[2 body]

PŘÍKLAD DRUHÝ Vypočtete hodnotu matice A řádu $n \times n$, jejíž prvky jsou součtem čísla řádku a sloupce, tedy $A_{i,j} = i + j$. [3 body]

PŘÍKLAD TŘETÍ Definujme si dvě třídy matic $\check{\mathcal{S}}_l$ a $\check{\mathcal{S}}_s$ jako matice se šachovnicovým vzorem tedy:

Matice A řádu $n \times n$ patří do $\check{\mathcal{S}}_l$, pokud pro všechna $i, j \in [n]$ taková, že $i + j$ je liché, platí $A_{i,j} = 0$.

Matice A řádu $n \times n$ patří do $\check{\mathcal{S}}_s$, pokud pro všechna $i, j \in [n]$ taková, že $i + j$ je sudé, platí $A_{i,j} = 0$.

Rozhodněte zda platí:

- Jsou třídy $\check{\mathcal{S}}_l$ a $\check{\mathcal{S}}_s$ uzavřené na součet?
- Jsou třídy $\check{\mathcal{S}}_l$ a $\check{\mathcal{S}}_s$ uzavřené na součin?
- Jsou třídy $\check{\mathcal{S}}_l$ a $\check{\mathcal{S}}_s$ uzavřené na inverze, pokud inverze existuje?
- Lze pro nějaká n říci, že žádná matice tvaru $n \times n$ ze třídy $\check{\mathcal{S}}_l$ či $\check{\mathcal{S}}_s$ nebude invertovatelná?

[5 bodů]

(Uzavřenost třídy \mathcal{A} na součet znamená, že pro každé dvě matice $A, B \in \mathcal{A}$ platí $A + B \in \mathcal{A}$. Podobně pro součin, inverzi a jiné operace.)