14. CVIČENÍ Z LINEÁRNÍ ALGEBRY I.

Lineární zobrazení: matice, jádro, obraz, izomorfismus

Příklad první Zdůvodněte, že vektorový prostor V je izomorfní vektorovému prostoru W a najděte izomorfismus.

$$V := \operatorname{span}\{(1,3,2,1)^T, (0,0,1,1)^T\}$$
$$W := \operatorname{span}\{(1,0,0,0)^T, (0,0,0,1)^T\}$$

Příklad druhý Rozhodněte, zda zobrazení s předpisem $f(x,y,z) = (x+y-2z, y-z, x-y)$ je izomorfismem na prostoru $\mathbb{R}^3$.

Příklad třetí Spočítejte matici lineárního zobrazení vůči kanonické bázi pro:

a) $F((1,1)^T) = (2,1)^T$, a $F((-1,1)^T) = (6,3)^T$,
b) $F((x_1,x_2)^T) = (x_1,x_2)^T$,
c) $F((x_1,x_2)^T) = (2x_1 - x_2, x_1 + x_2)^T$,
d) $F((x_1,x_2,x_3)^T) = (x_1 + 2x_2 + x_3, x_1 + 5x_2, x_3)^T$,

Příklad čtvrtý Mějme dánu matici linárního zobrazení $f : U \to V$ vzhledem k bázím B_1, B_2, tedy ${}_{B_2}[f]_{B_1}$, a mějme dány báze B_3, B_4 prostorů U, V. Navrhněte postup, jak najít matici f vzhledem k bázím B_3, B_4, tedy ${}_{B_4}[f]_{B_3}$.

Příklad pátý Určete báze jádra a obrazu lineárního zobrazení, jejich dimenze a určete, jestli je zobrazení prosté, pro lineární zobrazení F zadané následovně:

a) $F(x_1,x_2,x_3) = (x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_1 + 2x_2 + x_3, x_1 - x_3)$
b) $F((1,0,0)^T) = (2,3)^T$, $F((1,1,1)^T) = (0,1)^T$, $F((-1,3,-1)^T) = (0,3)^T$

Příklad šestý Dokažte, že izomorfismus $\mathbb{R}^n$ zobrazuje přímky na přímky.