13. CVIČENÍ Z LINEÁRNÍ ALGEBRY I.

Lineární zobrazení

Příklad první Spočítejte $F(v)$ kde $F\colon V \to W$ je lineární zobrazení mezi vektorovými prostory V a W s bázemi B_1 a B_2 zadané následujícím předpisem (a vyjádřete výsledek vzhledem k bázi B_2):

a) V, W jsou $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^2$

B_1, B_2 jsou kanonické báze

$v = (1,3,8)^T$ nebo obecně $(x,y,z)^T$

$$F\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \quad F\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}, \quad F\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}4\\-7\end{pmatrix}.$$

b) V, W jsou $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^2$

$B_1 = \{(1,1,0)^T, (0,1,1)^T, (1,0,1)^T\}, B_2 = \{(1,0)^T, (2,1)^T\}$

$v = (1,3,8)^T_{B_1}$

$$F\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}_{B_1}\right) = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}_{\text{KAN}}, \quad F\left(\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}_{B_1}\right) = \begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}_{\text{KAN}}, \quad F\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}_{B_1}\right) = \begin{pmatrix}4\\-7\end{pmatrix}_{\text{KAN}}.$$

c) $B_1 = \{u_1, u_2, u_3\}, \quad B_2 = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$

$v = u_1 + 2u_2 - u_3$

$$F(u_1) = v_1 + v_2 + v_3 + v_4, \quad F(u_2) = 2v_1 - 2v_3, \quad F(u_3) = v_1 + 2v_2 + v_3.$$

Příklad druhý Najděte matici přechodu od báze B k bázi B' nad tělesem $\mathbb{R}$ a určete souřadnice vektoru v vzhledem k bázi B'. Kde

a)

$$B = \left\{\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-5\\2\end{pmatrix}\right\}, \quad B' = \text{ kanonická}, \quad [v]_B = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}.$$

b)

$$B = \text{ kanonická}, \quad B' = \left\{\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-5\\2\end{pmatrix}\right\}, \quad [v]_B = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}.$$

c)

$$B = \left\{\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}, B' = \left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\right\}, [v]_B = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}.$$

Příklad třetí Spočítejte matici lineárního zobrazení vůči kanonické bázi pro:

a) $F((1,1)^T) = (2,1)^T$, a $F((-1,1)^T) = (6,3)^T$,
b) $F((x_1,x_2)^T) = (x_1,x_2)^T$,
c) $F((x_1,x_2)^T) = (2x_1 - x_2, x_1 + x_2)^T$,
d) $F((x_1,x_2,x_3)^T) = (x_1 + 2x_2 + x_3, x_1 + 5x_2, x_3)^T$,

Příklad čtvrtý Mějme dánu matici linárního zobrazení $f : U \to V$ vzhledem k bázím B_1, B_2, tedy ${}_{B_2}[f]_{B_1}$, a mějme dány báze B_3, B_4 prostorů U, V. Navrhněte postup, jak najít matici f vzhledem k bázím B_3, B_4, tedy ${}_{B_4}[f]_{B_3}$.

Příklad pátý Určete báze jádra a obrazu lineárního zobrazení, jejich dimenze a určete, jestli je zobrazení prosté, pro lineární zobrazení F zadané následovně:

a) $F(x_1,x_2,x_3) = (x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_1 + 2x_2 + x_3, x_1 - x_3)$
b) $F((1,0,0)^T) = (2,3)^T, \quad F((1,1,1)^T) = (0,1)^T, \quad F((-1,3,-1)^T) = (0,3)^T$

Příklad šestý Zdůvodněte, že vektorový prostor V je izomorfní vektorovému prostoru W a najděte izomorfismus.

$$V := \operatorname{span}\{(1,3,2,1)^T, (0,0,1,1)^T\}$$
$$W := \operatorname{span}\{(1,0,0,0)^T, (0,0,0,1)^T\}$$