9. CVIČENÍ Z LINEÁRNÍ ALGEBRY I.

Vektorové prostory: lineární kombinace a (ne)závislost

PŘÍKLAD PRVNÍ Zjistěte, zda jsou následující vektory v daném vektorovém prostoru lineárně závislé nebo nezávislé:

a) $(2,0,3),(1,-1,1),(0,2,1)$ v $\mathbb{R}^3$,
b) $(0,1,1,1),(1,0,1,1),(1,1,0,1),(1,1,1,0)$ v $\mathbb{R}^4$ a v $\mathbb{Z}_3^4$,

PŘÍKLAD DRUHÝ Zjistěte, zda se vektor v dá získat jako lineární kombinace vektorů z množiny A nad tělesem T (koeficienty případné kombinace hledat nemusíte):

a) $v=(6,5,-4)^T$, $A=\{(4,1,-2)^T,(0,2,-1)^T,(3,4,-1)^T\}$ a $T=\mathbb{R}$,
b) $v=(7,-2,\lambda)^T$, $A=\{(2,3,1)^T,(1,-6,8)^T,(5,7,3)^T\}$ a $T=\mathbb{R}$ (v závislosti na $\lambda\in\mathbb{R}$),
c) $v=(i,-1)^T$, $A=\{(1,i)^T,(i,1-i)^T\}$ a $T=\mathbb{C}$,
d) $v=(1,0,1)^T$, $A=\{(2,1-i,1+i)^T,(2+2i,1+3i,1-i)^T,(2,i-1,1+i)^T\}$ a $T=\mathbb{C}$.

PŘÍKLAD TŘETÍ Rozhodněte, zda vektory $(1,1,0,1),(0,1,0,1),(0,1,1,0),(1,1,1,0)$ a $(0,0,1,1)$ generují $\mathbb{R}^4$, resp. $\mathbb{Z}_2^4$.

PŘÍKLAD ČTVRTÝ Vyjádřete $7x-7$ jako lineární kombinaci polynomů $x^2+x, x+2$ a x^2-x+3 nad $\mathbb{R}$.

PŘÍKLAD PÁTÝ Nechť u,v,w jsou lineárně nezávislé vektory z vektorového prostoru V nad $\mathbb{R}$. Rozhodněte, zda jsou následující množiny lineárně nezávislé (a pokud jsou lineárně závislé, vyjádřete nějaký vektor jako lineární kombinaci ostatních):

a) $\{u,u+v,u+w\}$,
b) $\{u+v,u+w,v+w\}$,
c) $\{u+v,u-v,u+w,u-w\}$,