5. CVIČENÍ Z OPTIMALIZACE

Mnohostěny a jejich stěny

Příklady naleznete na zadní straně.

D: *Nadrovina* je libovolný afinní prostor v $\mathbb{R}^d$ dimenze $d-1$, je určena rovnicí $c^T x = b$. V rovině tedy je každá přímka nadrovinou, v 3D prostoru je nadrovinou libovolná rovina, atd.

Nadrovina rozděluje prostor $\mathbb{R}^d$ na dva *poloprostory*. Nadrovinu samotnou počítáme jako součást obou poloprostorů.

D: *Konvexní mnohostěn* je libovolný objekt v $\mathbb{R}^d$, který je průnikem konečně mnoha poloprostorů. Alternativně můžeme říci, že konvexní mnohostěn je libovolná množina bodů tvaru $\{x | Ax \leq b\}$ pro nějakou reálnou matici A a realný vektor b.

D: Nechť P je konvexní mnohostěn a $c \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}$. Jestliže $\forall x \in P : c^T x \leq t$ a zároveň $\exists x : c^T x = t$, označíme $\{x | c^T x = t\}$ jako *tečnou nadrovinu* konvexního mnohostěnu P.

Průniky tečných nadrovin s mnohostěnem pak nazýváme *stěnami* mnohostěnu P. K nim také započítáváme dvě *nevlastní stěny* $\emptyset$ a P.

D: *Vrchol* mnohostěnu P je stěnou dimenze 0, *hrana* je stěnou dimenze 1 a *faseta* je stěnou dimenze $d-1$.

D: Řekneme, že konvexní mnohostěn je *omezený*, pokud se vejde do koule s konečně velkým poloměrem. Pro dobrou intuici si stačí představit, že mnohostěn neutíká do nekonečna.

Příklad první Kolik nejméně poloprostorů (nerovnic) je potřeba pro popis d-dimenzionální krychle $[0,1]^d$? A kolik má d-dimenzionální krychle vrcholů?

Příklad druhý Mějme mnohostěn $P = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 1 \ \& \ x \leq 2\}$. Převeďte zápis jeho dvou nerovnicových podmínek do rovnicového tvaru a nakreslete mnohostěn z rovnicového tvaru (jeho prostoru vzroste dimenze).

Příklad třetí Vlastnosti mnohostěnů:

- Uvažte váš oblíbený konvexní mnohostěn P a najděte dvě různé tečné nadroviny n_a, n_b, jejichž neprázdný průnik s P určuje tutéž stěnu.
- Mějme konvexní mnohostěn P. Dokažte, že průnik dvou stěn P je také stěna P.

Příklad čtvrtý Dokažte, že každá stěna *omezeného* mnohostěnu je konvexním obalem podmnožiny jeho vrcholů. Ukažte také, že bez slova „omezeného“ tvrzení neplatí.

Příklad pátý Rozhodněte, jestli vrchol $v = (1,1,1)$ je vrcholem mnohostěnu definovaného následujícím systémem nadrovin:

a)

$$\begin{pmatrix} -1 & -6 & 1 \\ -1 & -2 & 7 \\ 0 & 3 & -10 \\ 2 & 6 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ -7 \\ 6 \end{pmatrix}$$

b)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Zde navíc vypište všechny vrcholy daného mnohostěnu.

Příklad šestý Dokažte, že každý omezený konvexní mnohostěn dimenze d v $\mathbb{R}^d$ má alespoň $d+1$ vrcholů a alespoň $d+1$ faset.

Definice: d-dimenzionální *simplex* je konvexním obalem $d+1$ afinně nezávislých bodů. Pro jednoduchost si d-dimenzionální simplex v $\mathbb{R}^d$ můžeme představit jako konvexní obal:

$$\mathrm{conv}(0, (0,0,\ldots,0,1), (0,0,\ldots,1,0), \ldots, (1,0,\ldots,0,0))$$

Příklad sedmý Dokažte, že libovolná stěna simplexu je sama simplexem.