NOPT048: Optimalizační metody - LS 2012 Jiří Sgall

Úvod, problém lineárního programování

20. 4. 2012, 9. přednáška *Zapsal: Jozef Gandžala, Pavol Rohár*
Poslední změna: 16. června 2012

1 Farkasovo lemma

Věta 1 (Farkasovo lemma). *Systém* $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *má nezáporné řešení* $\iff$ *neexistuje* y *t.ž.*

$$\left.\begin{array}{rcl} A^T\mathbf{y} & \geq & 0 \\ \mathbf{b}^T\mathbf{y} & < & 0 \end{array}\right\} (*)$$

Důkaz. (alternativní) Geometricky:
$C = \{Ax \mid x \geq 0\}$ ... kužel generovaný sloupci A
$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ má nezáporné řešení $\Leftrightarrow \mathbf{b} \in C$
$\mathbf{y}$ splňující $(*)$ říká: nadrovina kolmá k $\mathbf{y}$ (t.j. $\{\mathbf{z} \mid \mathbf{z}^T\mathbf{y} = 0\}$) odděluje $\mathbf{b}$ a C. □

Věta 2. *Nechť* $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$ *má řešení. Pak každé řešení* $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$ *splňuje* $\mathbf{c}^T\mathbf{x} \leq \delta$ *právě když existuje* $\mathbf{y} \geq 0$ *takové, že* $A^T\mathbf{y} = \mathbf{c}$ *a* $\mathbf{b}^T\mathbf{y} \leq \delta$.

Důkaz.
"$\Leftarrow$" ... $\mathbf{y}$ dává koeficienty, kterými násobíme nerovnice $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$, dostaneme $\mathbf{c}^T\mathbf{x} \leq \mathbf{b}^T\mathbf{y} \leq \delta$
"$\Rightarrow$" ... neexistuje $\mathbf{y} \Longrightarrow$ najdu řešení $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$ nesplňující $\mathbf{c}^T\mathbf{x} \leq \delta$
Neexistuje $\mathbf{y} \geq 0$ a $\lambda \geq 0$:

$$\begin{array}{rcll} A^T\mathbf{y} & = & \mathbf{c} & \cdot\, \mathbf{z} \\ b^T\mathbf{y} + \lambda & = & \delta & \cdot\, \frac{1}{\mu} \end{array}$$

Podle Farkasova lematu existuje $\mathbf{z}, \mu$: $A\mathbf{z} + \mathbf{b}\mu \geq 0,\ \mu \geq 0\mathbf{c}^T\mathbf{z} + \delta\mu < 0$

- $\mu > 0$

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{x} & := & -\frac{1}{\mu}\mathbf{z} \\ A\mathbf{x} & \leq & \mathbf{b} \\ \mathbf{c}^T\mathbf{x} & > & \delta \end{array}$$

- $\mu = 0$

$$\begin{array}{rcll} \mathbf{x_0} \text{ řešení } \mathbf{Ax_0} & \leq & \mathbf{b} & (i) \\ A\mathbf{z} & \geq & 0 & (ii) \\ \mathbf{c}^T\mathbf{z} & < & 0 & \\ \mathbf{x} & = & \mathbf{x_0} - \mathbf{M}\cdot\mathbf{z} & \end{array}$$

z (i) a (ii) vyplývá: $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$
Pro $M \gg 0$ dostáváme $\mathbf{c}^T\mathbf{x} = \mathbf{c}^T \cdot \mathbf{x_0} - \mathbf{Mc^T} \cdot \mathbf{z} \to \infty$
(pro libovolné δ vždy najdu dostatečně velké M) $\square$

2 Dualita

Označme si speciální případy úloh LP (a úlohy k nim duální):

$$(P) \quad \begin{array}{rl} \text{maximalizuj} & \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \text{pro} & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \\ \text{za podmínek} & A\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \end{array} \qquad (D) \quad \begin{array}{rl} \text{minimalizuj} & \mathbf{b}^T\mathbf{y} \\ \text{pro} & \mathbf{y} \geq 0 \\ \text{za podmínek} & A^T\mathbf{y} = \mathbf{c} \end{array}$$

$$(\bar{P}) \quad \begin{array}{rl} \text{maximalizuj} & \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \text{pro} & \mathbf{x} \geq 0 \\ \text{za podmínek} & A\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \end{array} \qquad (\bar{D}) \quad \begin{array}{rl} \text{minimalizuj} & \mathbf{b}^T\mathbf{y} \\ \text{pro} & \mathbf{y} \geq 0 \\ \text{za podmínek} & A^T\mathbf{y} \geq \mathbf{c} \end{array}$$

Věta 3 (o dualitě)**.** *Pro (P) a (D) $[(\overline{P})a(\overline{D})]$ platí jedna z možností:*
(1) (P) i (D) jsou nepřípustné
(2) Jedna je neomezená, druhá nepřípustná
(3) Existují optima $\mathbf{x}^*$ a $\mathbf{y}^*$ úloh (P) a (D) splňující $\mathbf{c}^T\mathbf{x}^* = \mathbf{b^T}\mathbf{y}^*$

Důkaz. Nechť (P) má řešení, $\delta = \sup\{\mathbf{c}^T\mathbf{x} \mid A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\}$
Slabá věta o dualitě: $\delta \leq \mathbf{b}^T\mathbf{y}$ pro každé přípustné řešení (D)
Pokud $\delta < \infty$, tak podle **Věty 2.** existuje $\mathbf{y} \geq 0$: $A^T\mathbf{y} = \mathbf{c}$, $\mathbf{b}^T\mathbf{y} \leq \delta$
Takže $\mathbf{y}$ je optimální řešení (D). $\square$

Příklad 1. kdy případ *(1)* může nastat:

$$\begin{array}{lrcr} \text{maximalizuj} & x_2 + x_3 & & \\ \text{za podmínek} & x_1 & \leq & -1 \\ & -x_1 & \leq & -1 \\ & x_2 - x_3 & \leq & 0 \end{array} \quad \overset{dualita}{\rightsquigarrow} \quad \begin{array}{lrcr} \text{minimalizuj} & -y_1 - y_2 & & \\ \text{za podmínek} & y_1 - y_2 & \geq & 0 \\ & y_1 & \geq & 1 \\ & -y_1 & \geq & 1 \end{array}$$

Věta 4 (o komplementaritě)**.** *Nechť $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$ jsou přípustná řešení (P) a (D). Pak jsou obě optimální právě když:*
$(*)$ $(\forall j \in \{1, \ldots, m\})(y_j = 0 \vee a^{(j)}x = b_j)$ $\qquad$ *($a^{(j)}$ je j-tý řádek a)*
Nechť $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$ jsou přípustné řešení $(\overline{P})$ a $(\overline{D})$.
Pak jsou obě optimální $\iff$ platí (*) a (**)
$(**)$ $(\forall i \in \{1, \ldots, n\})(x_i = 0 \vee \sum_{j=1}^m a_{ij}y_j = c_j)$

Důkaz. Pro (P) a (D):
$\mathbf{y}^T\mathbf{b} - \mathbf{c}^T\mathbf{x} = \mathbf{y}^T \cdot (\mathbf{b} - A\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n y_j \cdot (\mathbf{b} - a^{(j)}\mathbf{x}) \geq 0 \ldots$ rovnost nastává $\iff$ platí $(*)$
Pro $(\overline{P})$ a $(\overline{D})$:
$\mathbf{y}^T\mathbf{b} - \mathbf{c}^T\mathbf{x} = \mathbf{y}^T\mathbf{b} - \mathbf{y}^TA\mathbf{x} + \mathbf{y}^TA\mathbf{x} - \mathbf{c}^T\mathbf{x} = \mathbf{y}^T \cdot (\mathbf{b} - A\mathbf{x}) + (\mathbf{y}^TA - \mathbf{c}^T) \cdot \mathbf{x} \geq 0 \ldots$ rovnost nastává $\iff$ platí $(*)$ a $(**)$. $\square$

3 Totální unimodularita

Definice 5. Matice A je totálně unimodulární (TU) $\iff$ $\forall$ čtvercová podmatice má determinant rovný 0, 1, nebo -1.

Věta 6. *Nechť A má v každém sloupci ≤ 2 nenulová čísla, ne obě 1 nebo -1. Pak je TU.*

Důkaz. Byl na minulých přednáškách. □

Věta 7. *Nechť A má v každém sloupci ≤ 2 nenuly. Pak je TU $\iff$ lze vynásobením některých řádků -1 dostat tvar z min. věty.*

Důkaz. Nechť B je minimální podmatice A, která nesplňuje
TODO.

□

Příklad 2. Matice incidence orientovaných grafů jsou TU.
Matice incidence neorientovaných grafů jsou TU $\iff$ graf je bipartitní.