NOPT048: Optimalizační metody - LS 2012 Jiří Sgall

Dualita lineárního programování, Farkasovo lemma

13. 4. 2012, 8. přednáška *Zapsal: Michal koutný, Martin Postupa*

Poslední změna: 16. června 2012

1 Dualita lineárního programování

Získáme duální proměnné y_i pro každou primární podmínku $A_i.$ (i-tý řádek A):

$$\begin{aligned} y_i \in \mathbb{R} \quad &\text{pro} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \\ y_i \geq 0 \quad &\text{pro} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i \end{aligned}$$

Duální podmínka pro každou primární proměnnou x_j:

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i = c_j \quad \text{pro} \quad x_j \in \mathbb{R} \\ &\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i \geq c_j \quad \text{pro} \quad x_j \geq 0, \text{pokud primární maximalizuje} \\ &\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i \leq c_j \quad \text{pro} \quad x_j \geq 0, \text{pokud primární minimalizuje} \end{aligned}$$

Účelová funkce

$$\begin{aligned} \min \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \qquad &\text{pokud primární je max } c^T x \\ \max \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \qquad &\text{pokud primární je min } c^T x \end{aligned}$$

Pozorování 1. *Duální LP k duálnímu LP je původní LP.*

Příklad 1. Speciální případy pro $a \in \mathbb{R}^{m \times n}, c \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}^m$:

$$\text{(P)} \quad \begin{array}{c} \max \quad c^T x \\ x \in \mathbb{R}^n \\ Ax \leq b \end{array} \qquad \text{(D)} \quad \begin{array}{c} \min \quad b^T y \\ y \geq 0 \\ A^T y = c \end{array}$$

$$(\bar{\text{P}}) \quad \begin{array}{c} \max \quad c^T x \\ x \geq 0 \\ Ax \leq b \end{array} \qquad (\bar{\text{D}}) \quad \begin{array}{c} \min \quad b^T y \\ y \geq 0 \\ A^T y \geq c \end{array}$$

Věta 2 (slabá o dualitě)**.** *Nechť x a y jsou přípustná řešení (P) a (D) pak $c^T x \leq b^T y$.*

Důkaz.

$$
\begin{aligned}
y^T Ax \leq y^T b \quad & \text{z (P)}, y \geq 0 \\
y^T ax = c^T x \quad & \text{z (D)}
\end{aligned}
$$

□

Věta 3 (o dualitě)**.** *Pro úlohy (P) a (D) nebo ($\bar{P}$) a ($\bar{D}$) nastává jedna z možností:*

- *ani (P) ani (D) nemá přípustné řešení,*
- *jedna z nich je neomezená a druhá nepřípustná,*
- *(P), (D) mají přípustné řešení pak existují optimální řešení x^* a y^* a platí: $c^T x^* = b^T y^*$.*

Pozn: soustava rovnic $Ax = b$ má řešení $\Leftrightarrow$ $A^T y$ a $b^T y < 0$ nemá řešení.

2 Farkasovo lemma

Lemma 4 (Fourier-Motzkinova eliminace)**.** *Pro soustavu nerovnic $Ax \leq b$, kde $x \in \mathbb{R}^n$, lze získat soustavu $\bar{A}\bar{x} \leq \bar{b}$, kde $\bar{x} \in \mathbb{R}^{n-1}$ řeší soustavu $\bar{A}\bar{x} \leq \bar{b}$ právě tehdy, řeší-li x soustavu $Ax \leq b$. Navíc $x_i = \bar{x}_i$ pro $i \in \{1, \ldots, n-1\}$.*

Důkaz. Vytvoříme si pomocnou soustavu $\tilde{A}x \leq \tilde{b}$ tak, že $\tilde{A}_{i\cdot} = A_{i\cdot}/|a_{in}|$ a $\tilde{b}_i = b_i/|a_{in}|$, pokud $|a_{in}| \neq 0$. BÚNO jsou řádky matice seřazeny dle znaménka v posledním sloupci. Pomocná soustava (*) pak vypadá

$$
\begin{aligned}
\tilde{a}^i \tilde{x} + x_n &\leq \tilde{b}_i & i &= 1, \ldots, m' \\
\tilde{a}^i \tilde{x} - x_n &\leq \tilde{b}_i & i &= 1 + m', \ldots, m'' \\
\tilde{a}^i \tilde{x} &\leq \tilde{b}_i & i &= 1 + m'', \ldots, m,
\end{aligned}
$$

kde $\tilde{a}^i$ značí i-tý řádek matice $\tilde{A}$ bez posledního sloupce.

Kombinací řádků pomocné soustavy vytvoříme eliminovanou soustavu (**)

$$
\begin{aligned}
(\tilde{a}^i + \tilde{a}^j)\tilde{x} &\leq \tilde{b}_i + \tilde{b}_j & i = 1, \ldots, m', j &= 1 + m', \ldots, m'' \\
\tilde{a}^i \tilde{x} &\leq \tilde{b}_i & i &= 1 + m'', \ldots, m
\end{aligned}
$$

Ukážeme, že $\tilde{x}$ řeší eliminovanou soustavu (**) $\Leftrightarrow$ x řeší pomocnou (tedy i původní) soustavu (*).

"$\Leftarrow$": snadno, vynecháme poslední složku x.

"$\Rightarrow$":

Bud $\tilde{x}$ řešení (**), pak zvolme $x_n = \min_{i \in \{1,\ldots,m'\}}(\tilde{b}_i - \tilde{a}^i\tilde{x})$. První skupina nerovnic platí, neboť $x_n \leq \tilde{b}_i - \tilde{a}^i\tilde{x}$. Zároveň $\exists i \in \{1, \ldots, m'\} : x_n = \tilde{b}_i - \tilde{a}^i\tilde{x}$, tuto nerovnost můžeme $\forall j \in \{m' + 1, \ldots, m''\}$ odečíst od $(\tilde{a}^i + \tilde{a}^j)\tilde{x} \leq \tilde{b}_i + \tilde{b}_j$, a tedy máme platnost řešení i pro druhou skupinu nerovnic. Třetí skupina platí triviálně. □

Věta 5 (Farkasovo lemma pro nerovnice)**.** *$Ax \leq b$ má řešení $[A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^n]$ $\Leftrightarrow$ neexistuje $y \in \mathbb{R}^m$ tak, že $y \geq 0, A^T y = 0, b^T y < 0$*

Důkaz. '$\Rightarrow$' lehký $\exists y \Rightarrow$ odvodíme z $Ax \leq b$ spor.

'$\Leftarrow$' (užitím Fourier-Motzkinovy eliminace) $Ax \leq b$ nemá řešení $\Rightarrow$ najdeme y''

Indukcí dle n. Pro $n = 1$ úvahou.

Dále (*) nemá řešení $\Rightarrow$ (**) nemá řešení $\Rightarrow \exists y'$ pro (**) (z indukčního předpokladu). Z y' uděláme y pro (*)

$$\begin{aligned} y_i &= \sum_{j=m'+1}^{m''} y_{ij}, && \text{pro} \quad i = 1, \ldots, m' \\ y_j &= \sum_{i=1}^{m''} y'_{ij}, && \text{pro} \quad j = m'+1, \ldots, m'' \\ y_i &= y'_i && \text{pro} \quad i = m''+1, \ldots, m \end{aligned}$$

□

Věta 6 (Farkasovo lemma pro rovnice)**.** *Systém $Ax = b$ má nezáporné řešení $\Leftrightarrow A^T y \geq 0$ a $b^T y < 0$ nemá řešení*

Důkaz. Použití Farkasovo lemmatu pro nerovnice.

$$A' = \begin{pmatrix} A \\ -A \\ -I_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(2m+n)\times n} \qquad b' = \begin{pmatrix} b \\ -b \\ 0 \end{pmatrix}$$

$Ax = b$ má nezáporné řešení $\Leftrightarrow A'x \leq b'$ má řešení $\Leftrightarrow$

$$\nexists y' : \begin{array}{ll} y' & \geq 0 \\ A'^T y' & = 0 \\ b'^T y^T & < 0 \end{array} \Leftrightarrow \nexists y : \begin{array}{ll} A^T y & \geq 0 \\ b^T y & < 0 \end{array},$$

kde $y_i = y'_i - y'_{i+m}$.

□