NOPT048: Optimalizační metody - LS 2012	Jiří Sgall

Simplexová metoda

30. 3. 2012, 6. přednáška — *Zapsal: Pavel Pilař, Kateřina Nevolová*

Poslední změna: 16. června 2012

1 Simplexová metoda

Definice 1. Bázické přípustné řešení lineárního programu je takové přípustné řešení, které splňuje n lineárně nezávislých podmínek s rovností. (Všechny rovnice, těsně splněné nerovnice a podmínky nezápornosti.)

Pozorování 2. *Bázická řešení jsou právě vrcholy mnohostěnu přípustných řešení.*

Důkaz. Z minimálního popisu mnohostěnu. □

Lineární program v rovnicovém tvaru s lineárně nezávislými podmínkami:

$$\begin{aligned} \text{maximalizuj} \quad & c^T x \\ \text{pro} \quad & x \geq 0 \\ \text{za podmínek} \quad & Ax = b \end{aligned}$$

a $\text{rank}(A) = m$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ (počet rovnic). Navíc víme, že $Ax = b$ má řešení. Potom víme, že x je bázické řešení, pokud existuje nějaká množina B, $B \subseteq \{1, \dots n\}$ indexů tak, že $|B| = m$, A_B (sloupce matice A indexované B) je regulární, $(\forall i \notin B) x_i = 0$ a bázické řešení je přípustné řešení.

Lemma 3. *Nechť x je přípustné řešení a K je množina $K = \{i \mid x_i \neq 0\}$. Pak x je bázické právě tehdy, když A_K má lineárně nezávislé sloupce.*

Důkaz. $\Rightarrow$: triviální ($K \subseteq B$)

$\Leftarrow$: A_K má $|K| \leq m$ nezávislých sloupců, A má m lineárně nezávislých sloupců a podle věty o výměně doplníme K na bázi B. (jeden z důsledků věty) □

Definice 4. Simplexová tabulka určená bází B je soustava $m + 1$ lineárních rovnic pro proměnné $x_1, \dots x_n, z$, která má stejná řešení jako $Ax = b$, $z = c^T x$.

Zapisujeme a značíme $x_B = p + Q x_N$, kde N jsou všechny nebázické proměnné ($N = \{1, \dots n\} \setminus B$), $z = z_0 + r^T x_N$ a matice koeficientů u x_B je I_m. Kde $p \in \mathbb{R}^m$, $Q \in \mathbb{R}^{m \times (n-m)}$, $z_0 \in \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{R}^{n-m}$.

Pozorování 5. *Báze B je přípustná (= odpovídající řešení je přípustné) $\Leftrightarrow$ $p \geq 0$.*

Pozorování 6. *Řešení odpovídající přípustné bázi B je optimální $\Leftarrow$ $r \leq 0$.*

Pozorování 7. *($\forall$ bázi B) $p = A_B^{-1} b$, $Q = -A_B^{-1} A_N$, $z_0 = c_B^T A_B^{-1} b$, $r = c_N - (c_B^T A_B^{-1} A_N)^T$*

Důkaz. $Ax = b$ upravíme na $A_B^{-1} A x = A_B^{-1} b$, x rozdělíme na x_B a x_N, $z = c^T x = c_B^T x_B + c_N^T x_N = c_B^T \cdot (A_B^{-1} b - A_B^{-1} A_N x_N) + c_N^T x_N = c_B^T A_B^{-1} b + (c_N^T - c_B^T A_B^{-1} A_N) \cdot x_N$. □

Lemma 8. *Pokud je úloha v rovnicovém tvaru omezená a přípustná, pak má optimální bázické řešení.*

Důkaz. Ke každému řešení existuje bázické řešení se stejnou nebo vyšší hodnotou účelové funkce. □

1.1 Pivotovací krok

Mějme bázické proměnné $B = \{j_1, \dots j_m\}$, nebázické proměnné $N = \{l_1, \dots l_{n-m}\}$. B' je nová báze tak, že $B' = B \cup \{l_t\} \setminus \{j_s\}$.

Vstupující proměnná: l_t taková $r_{l_t} > 0$ (z nich vybereme pomocí pivotovacího pravidla).

Vystupující proměnná: $q_{st} < 0$ a $-\frac{p_s}{q_{st}}$ je minimální z $-\frac{p_i}{q_{it}}$ pro $i \in B$, $q_{it} < 0$.

Úprava tabulky: Převedeme vstupující proměnnou x_{l_t} vlevo a dosadíme, nebo to popíšeme formálně - tedy přičtením $-\frac{p_s}{q_{st}} \cdot q_{it}$ násobku $s$tého řádku k $i$tému.

Pokud **neexistuje vstupující proměnná**: $\Rightarrow$ konec, B dává optimální řešení.

Pokud **neexistuje vystupující proměnná**: $\Rightarrow$ konec, ale úloha je neomezená.

Pivotovací pravidla:

- maximální r_{l_t} (Dantzig)
- Spočítat maximální výslednou hodnotu účelové funkce, tedy maximální z_0, což ale může být náročné.
- Užít kompromis: **nejstrmější hranu**: spočítáme si maximální $c^t \cdot \frac{x \text{ nové } - x \text{ staré}}{||x \text{ nové } - x \text{ staré }||}$, kde "$x$ nové" zvolíme například takové, že $x_{l_t} = 1$. Tento postup je praktický, protože většinou trvá malý počet kroků.
- **Blandovo pravidlo**: Vybereme nejmenší možný přípustný index l_t a k němu vybereme nejmenší možný index j_s. Tento postup necyklí.
- **Lexikografické pravidlo**: Vezmeme si t, kandidáta na vstupující proměnnou: $\left(\frac{q_{s1}}{q_{st}}, \frac{q_{s2}}{q_{st}}, \dots \frac{q_{s\cdot(n-m)}}{q_{st}}\right)$ a vybereme t s lexikograficky nejmenším vektorem. Tento postup necyklí.
- l_t vybereme **náhodně** mezi těmi, které můžeme použít.

Hledání počátečního řešení:

$$\begin{aligned} \text{maximalizuj} \quad & c^T x \\ \text{pro} \quad & x \geq 0 \\ \text{za podmínek} \quad & Ax = b \end{aligned}$$

Pomocná úloha: úprava taková, aby b bylo nezáporné, pak:

$$\begin{aligned} \text{maximalizuj} \quad & -(x_{n+1}, \dots x_{n+m}) \\ \text{pro} \quad & \bar{x} \geq 0,\ \bar{x} \in \mathbb{R}^{n+m} \\ \text{za podmínek} \quad & \bar{A}\bar{x} = b,\ \bar{A} \in \mathbb{R}^{m \times (n+m)},\ \bar{A} = (A|I_m) \end{aligned}$$

$(0, \dots 0, b_1, \dots b_m)$ je bázické řešení $\bar{A}\bar{x} = b$

$(x_1, \dots x_n, 0, \dots 0)$ řešení pomocné úlohy $\Rightarrow$ řešení původní úlohy.