NOPT048: Optimalizační metody - LS 2012	Jiří Sgall
Celočíselné programování, metoda řezů	
25. 5. 2012, 14. přednáška	*Zapsal: Patrik Pasterčík*
Poslední změna: 25. června 2012	

1 Celočíselné programování, metoda řezů

Mějme lineární program $Ax \leq b$, $x \geq 0$, mnohostěn $P = \{x \mid Ax \leq b \wedge x \geq 0\}$ a budeme předpokládat, že A a b jsou racionální. Zajímá nás jak vypadá $P \cap \mathbb{Z}^n$ a také $conv(\{x \in \mathbb{Z}^n \mid x \in P\})$

Definice 1. Nechť nerovnice $\alpha^T x \leq \beta$ je platná nerovnice pro P. Pak nerovnici $\lfloor \alpha^T \rfloor x \leq \lfloor \beta \rfloor$ nazýváme **platný řez**

Pozorování 2. *$P \cap \mathbb{Z}^n$ splňují každý platný řez. Obecný platný řez dostaneme jako $u^T x \leq \lfloor y^T b \rfloor$ pro nějaké $y \geq 0$ a $u^T \leq \lfloor y^T A \rfloor$*

Příklad 1. TODO obrázek

Příklad 2. Polytop párování
$x_e \geq 0$ a $x(\delta(x)) \leq 1 \to x(\delta(S)) + 2x(\gamma(S)) \leq |S|$, můžeme snížit $x(\delta(S))$ na 0, to nám nezmění nerovnost a dostaneme nerovnici $2x(\gamma(S)) \leq |S|$
Platné nerovnice
$(\forall S \subseteq V)\ x(\gamma(S)) \leq \frac{|S|}{2}$
$(\forall S \subseteq V, |S| \text{ liché})\ x(\gamma(S)) \leq \frac{|S|-1}{2}$

Věta 3. *Nechť $P = \{x \mid Ax \leq b \wedge x \geq 0\}$ je racionální mnohostěn a $\alpha^T x \leq \beta$, $\alpha \in \mathbb{Z}^n$, $\beta \in \mathbb{Z}$ nerovnost platná pro všechna $x \in P \cap \mathbb{Z}^n$. Pak $\alpha^T x \leq \beta$ lze odvodit postupným přidáním platných řezů k $Ax \leq b$.*

Důkaz. Jen pro binární případ (tj. $x_i \leq 1$ jsou platné pro P)

- Pro dost velké t je platná nerovnice pro P.
  (*) $\alpha^T x \leq \beta + t$
- Pro dost velké M a každý rozklad $N_0 \cup N_1 = \{1, \dots, n\}$ je pro P platná
  (**) $\alpha^T x \leq \beta + M \sum_{i \in N_0} x_i + M \sum_{i \in N_1} (1 - x_i)$
- Z (***) $\alpha^T x \leq \beta + T + 1$
  a (**) odvodíme
  $\alpha^T x \leq \beta + T + \sum_{i \in N_0} x_i + \sum_{i \in N_1} (1 - x_i)$

□