METODA ŘEZŮ / SEČNÝCH NADROVIN
(cutting planes, Chvátal-Gomory cuts)

postupně generujeme nerovnosti platné pro všechna celočíselná řešení LP relaxace

LP: $Ax \leq b$ $\quad$ A, b celočíselné

$x \geq 0$ $\quad$ racionální polytop $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b \wedge x \geq 0\}$

celočíselná řešení: $Z = \{x \in \mathbb{Z}^n \mid Ax \leq b \wedge x \geq 0\}$

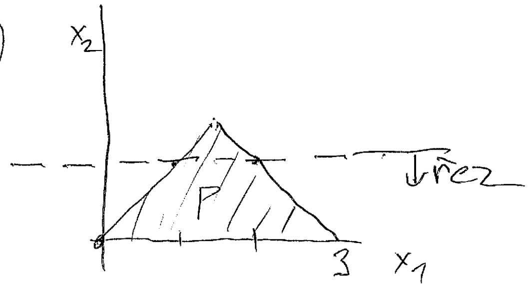
Def: Nechť $\alpha^T x \leq \beta$ ~~je~~ platí pro všechna $x \in P$.
(nerovnice)

Pak nerovnici $\lfloor \alpha^T \rfloor x := \sum_{i=1}^{n} \lfloor \alpha_i \rfloor x_i \leq \lfloor \beta \rfloor$

nazýváme platným řezem (Chvátalův-Gomoryho řez)

Pozorování:
- Celočíselná řešení splňují každý platný řez.
- Obecný platný řez získáme jako $u^T x \leq \lfloor y^T b \rfloor$ pro nějaké $y \geq 0$, $y \in \mathbb{R}^m$ a celočíselné u splňující $u^T \leq \lfloor y^T A \rfloor$

PŘÍKLADY ŘEZŮ

① 

$$P = \{x \mid x_1, x_2 \geq 0$$
$$-x_1 + x_2 \leq 0$$
$$x_1 + x_2 \leq 3\}$$

platná nerovnost: $x_2 \leq \frac{3}{2}$

platný řez $x_2 \leq 1$

② <u>polytop párování:</u>

$$x_e \geq 0 \quad \forall e$$
$$x(\delta(v)) \leq 1 \quad \forall v$$

platná nerovnost:

$$x(\gamma(S)) \leq \frac{|S|}{2} \quad \forall S \subseteq V$$

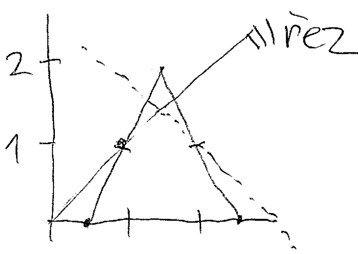
platný řez:

$$x(\gamma(S)) \leq \frac{|S|-1}{2} \quad \forall S \subseteq V,\ |S| \text{ liché}$$

⇒ platné řezy obsahují všechny stěny ~~párovací~~ polytopu párování

③ Mohou existovat nerovnosti platné pro Z, dokonce stěny conv(Z), které <u>nejsou</u> platné řezy

$$P = \{x \mid x_1, x_2 \geq 0$$
$$-2x_1 + x_2 \leq -1$$
$$2x_1 + x_2 \leq 5\}$$



$x_2 \leq 1$ není platný řez

$y = (\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$ dává řez: $x_1 + x_2 \leq 3$

po jeho přidání je

$x_2 \leq 1$ platný řez s $y = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$

UNIVERZALITA METODY ŘEZŮ

[V] Nechť $P=\{x \mid x\geq 0,\ Ax\leq b\}$ je racionální polytop a $\alpha^T x\leq \beta$, $\alpha\in\mathbb{Z}^n$, $\beta\in\mathbb{Z}$ nerovnost platná pro všechna celočíselná $x\in P$. Pak $\alpha x\leq\beta$ lze odvodit postupným přidáním konečně mnoha platných řezů k soustavě $Ax\leq b$.

Dk: ~~Nejprve~~ pro binární případ, tj $x_i\leq 1$ je platné pro P.

(1) $\alpha^T x \leq \beta + t$ je platná pro P pro nějaké $t\in\mathbb{Z}_+^{*}$

(2) Pro libovolné N_0, N_1 rozdělení $\{1,\dots,n\}$ $(N_0\cup N_1=\{1,\dots,n\},\ N_0\cap N_1=\emptyset)$ a dost velké M ~~je~~ $\in\mathbb{Z}_+$ je pro P platná nerovnost

(*) $\alpha^T x\leq\beta+M\sum_{i\in N_0}x_i + M\sum_{i\in N_1}(1-x_i)$

(3) Z (**) $\alpha^T x\leq \beta+T+1$ můžeme odvodit

$$\alpha^T x\leq\beta+T+\sum_{i\in N_0}x_i+\sum_{i\in N_1}(1-x_i) \qquad \forall T\in\mathbb{Z}_+,\ \forall (N_0,N_1)$$

Dk: $\frac{1}{M}\cdot(*) + \frac{M-1}{M}\cdot(**)$

(4) Nechť $p\leq n$, (P_0,P_1) je rozdělení $\{1,\dots,p-1\}$

Pak z $\alpha^T x\leq\beta+T+\sum_{i\in P_0\cup\{p\}}x_i+\sum_{i\in P_1}(1-x_i)$

a $\alpha^T x\leq\beta+T+\sum_{i\in P_0}x_i+\sum_{i\in P_1\cup\{p\}}(1-x_i)$

lze odvodit

(***) $$\alpha^T x\leq\beta+T+\sum_{i\in P_0}x_i+\sum_{i\in P_1}(1-x_i)$$

Dk: Kombinace s koef. $\frac{1}{2}$ a $\frac{1}{2}$

Dokončení: Postupně pro každé $T:=t,\dots,0$ a každé $p=n+1,\dots,1$ dokazujeme (***) pro všechna P_0 a P_1

POUŽITÍ ŘEZŮ

- Na začátku vygenerujeme (dostatečně) silné nerovnosti – jako párování
- Při nalezení neceločíselného bázického optima přidáme odpovídající řez

$$x_1 = \frac{1}{2} + x_3 - \frac{3}{2} x_4$$

$$\vdots$$

řez: $x_4 \geq 1$

Lepší příklad:

$$x_1 = \frac{11}{5} + x_3 - \frac{6}{5} x_4 - \frac{2}{5} x_5$$

$$\frac{1}{5} x_4 + \frac{2}{5} x_5 \geq \frac{1}{5}$$

$$-\frac{1}{5} x_4 - \frac{2}{5} x_5 \leq -\frac{1}{5}$$

řez: $-x_4 - x_5 \leq -1$

přidáme proměnnou: $-x_4 - x_5 + s = -1$

$$s \geq 0$$

PŘEHLED METOD CELOČÍSELNÉHO PROGRAM.

<u>Příklad</u>: Obchodní cestující

OBECNÉ METODY vs. SPECIFICKÉ HEURISTIKY

- VĚTVE A MEZE (branch and bound)

  větvíme se na podproblémy $x_i = 0$ a $x_i = 1$
  ($x_i \leq \beta$, $x_i \geq \beta + 1$)

  udržujeme dolní a horní odhady, v lepším případě neprohledáváme celý strom
  - horní odhad – přípustné řešení
  - dolní odhad – optimum LP relaxace
    - kombinatorické: TSP: min. kostra
- VĚTVE A ŘEZY
  - dolní odhad zesílíme pomocí řezů (i specifické třídy nerovností)
- HEURISTIKY PRO HLEDÁNÍ PŘÍPUSTNÉHO ŘEŠENÍ
  - TSP: nejbližší soused
  - aproximační algoritmy, hladové algoritmy
- LOKÁLNÍ PROHLEDÁVÁNÍ

  hledá lokální zlepšení, minimum v poly. velkém okolí

  TSP: přepojení 2 hran
- METODY PROHLEDÁVÁNÍ Z UMĚLÉ INTELIGENCE
  - tabu prohledávání (tabu search)
    - omezuje se vracení do nedávno prohledaných bodů
  - simulované žíhání
    - úměrně teplotě povolíme přechod k horšímu řešení
    - snižujeme teplotu
  - genetické algoritmy
- PROGRAMOVÁNÍ S OMEZUJÍCÍMI PODMÍNKAMI
- LAGRANGEOVSKÁ RELAXACE