Fourier-Motzkinova eliminace

Farkasovo lemma pro nerovnice:
Nechť $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ a $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Soustava $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$ má řešení právě když neexistuje $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ tak, že $\mathbf{y} \geq 0$, $A^T\mathbf{y} = 0$ a $\mathbf{b}^T\mathbf{y} < 0$.

Fourier-Motzkinova eliminace

Farkasovo lemma pro nerovnice:
Nechť $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ a $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Soustava $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$ má řešení právě když neexistuje $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ tak, že $\mathbf{y} \geq 0$, $A^T\mathbf{y} = 0$ a $\mathbf{b}^T\mathbf{y} < 0$.

$$\begin{aligned}
\bar{A}_{i*}\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{x}_n &\leq b_i & \qquad i &= 1, \dots, m' \\
\bar{A}_{j*}\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}_n &\leq b_j & \qquad j &= 1 + m', \dots, m'' \\
\bar{A}_{k*}\bar{\mathbf{x}} &\leq b_k & \qquad k &= 1 + m'', \dots, m,
\end{aligned}$$

Fourier-Motzkinova eliminace

Farkasovo lemma pro nerovnice:
Nechť $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ a $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Soustava $A\mathbf{x} \le \mathbf{b}$ má řešení právě když neexistuje $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ tak, že $\mathbf{y} \ge 0$, $A^T\mathbf{y} = 0$ a $\mathbf{b}^T\mathbf{y} < 0$.

$$
\begin{aligned}
\bar{A}_{i*}\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{x}_n &\le b_i && i = 1, \ldots, m' \\
\bar{A}_{j*}\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}_n &\le b_j && j = 1 + m', \ldots, m'' \\
\bar{A}_{k*}\bar{\mathbf{x}} &\le b_k && k = 1 + m'', \ldots, m,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\bar{A}_{i*} + \bar{A}_{j*})\bar{\mathbf{x}} &\le b_i + b_j && i = 1, \ldots, m', \quad j = 1 + m', \ldots, m'' \\
\bar{A}_{k*}\bar{\mathbf{x}} &\le b_k && k = 1 + m'', \ldots, m,
\end{aligned}
$$

Fourier-Motzkinova eliminace

Farkasovo lemma pro nerovnice:
Nechť $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ a $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Soustava $A\mathbf{x} \le \mathbf{b}$ má řešení právě když neexistuje $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ tak, že $\mathbf{y} \ge 0$, $A^T\mathbf{y} = 0$ a $\mathbf{b}^T\mathbf{y} < 0$.

$$
\begin{aligned}
\bar{A}_{i*}\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{x}_n &\le b_i & i &= 1, \dots, m' & &\cdot y_i \\
\bar{A}_{j*}\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}_n &\le b_j & j &= 1 + m', \dots, m'' & &\cdot y_j \\
\bar{A}_{k*}\bar{\mathbf{x}} &\le b_k & k &= 1 + m'', \dots, m, & &\cdot y_k
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\bar{A}_{i*} + \bar{A}_{j*})\bar{\mathbf{x}} &\le b_i + b_j & i &= 1, \dots, m', \quad j = 1 + m', \dots, m'' & &\cdot y'_{ij} \\
\bar{A}_{k*}\bar{\mathbf{x}} &\le b_k & k &= 1 + m'', \dots, m, & &\cdot y'_k
\end{aligned}
$$

Fourier-Motzkinova eliminace

Farkasovo lemma pro nerovnice:
Nechť $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ a $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Soustava $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$ má řešení právě když neexistuje $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ tak, že $\mathbf{y} \geq 0$, $A^T\mathbf{y} = 0$ a $\mathbf{b}^T\mathbf{y} < 0$.

$$
\begin{aligned}
\bar{A}_{i*}\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{x}_n &\leq b_i && i = 1, \ldots, m' && \cdot\, y_i \\
\bar{A}_{j*}\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}_n &\leq b_j && j = 1 + m', \ldots, m'' && \cdot\, y_j \\
\bar{A}_{k*}\bar{\mathbf{x}} &\leq b_k && k = 1 + m'', \ldots, m, && \cdot\, y_k
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\bar{A}_{i*} + \bar{A}_{j*})\bar{\mathbf{x}} &\leq b_i + b_j && i = 1, \ldots, m', \quad j = 1 + m', \ldots, m'' && \cdot\, y'_{ij} \\
\bar{A}_{k*}\bar{\mathbf{x}} &\leq b_k && k = 1 + m'', \ldots, m, && \cdot\, y'_k
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y_i &= \textstyle\sum_{j=m'+1}^{m''} y'_{ij} && i = 1, \ldots, m', \\
y_j &= \textstyle\sum_{i=1}^{m'} y'_{ij} && j = m' + 1, \ldots, m'', \\
y_k &= y'_k && k = m'' + 1, \ldots, m.
\end{aligned}
$$

Farkasovo lemma

Farkasovo lemma pro nerovnice:
Nechť $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ a $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Soustava $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$ má řešení právě když neexistuje $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ tak, že $\mathbf{y} \geq 0$, $A^T\mathbf{y} = 0$ a $\mathbf{b}^T\mathbf{y} < 0$.

Farkasovo lemma pro rovnice:
Nechť $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ a $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Soustava $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ má nezáporné řešení právě když neexistuje y takové, že $A^T\mathbf{y} \geq 0$ a zároveň $\mathbf{y}^T\mathbf{b} < 0$.