Aproximační a pravděpodobnostní algoritmy
NDMI084 – ZS 2014 – Jiří Sgall

Domácí úkol 3 – 9. prosince

Termín: 4. ledna 2015

Všechny listy podepište buď jménem nebo přezdívkou.
Všechny úlohy jsou za 2 body, pro zápočet je potřeba polovina bodů.
Úloha s hvězdičkou je bonusová navíc, nepočítá se do základu pro zápočet.

(1) Uvažujme lineární program pro MAX-SAT stejný jako v algoritmu LP-SAT na přednášce a (y^*, z^*) jeho optimální řešení. Nechť

$$f(p) = \begin{cases} \frac{3}{4}p + \frac{1}{4} & \text{for } p \le \frac{1}{3}\,, \\ \frac{1}{2} & \text{for } \frac{1}{3} \le p \le \frac{2}{3}\,, \\ \frac{3}{4}p & \text{for } p \ge \frac{2}{3}\,. \end{cases}$$

Uvažme algoritmus, který každou proměnnou x_i vybere nezávisle náhodně tak, že $x_i = 1$ s pravděpodobností $f(y_i^*)$, jinak $x_i = 0$. Dokažte, že tento algoritmus je 3/4-aproximační.

(2) V problému MAX-k-CUT je dán neorientovaný graf $G = (V, E)$. Výstup je rozklad V na k množin. Cíl je maximalizovat počet hran s vrcholy v různých množinách rozkladu. Najděte $(1 - 1/k)$-aproximační algoritmus, nejlépe detrministický.

Nápověda: Možností je více, hladový algoritmus, lokální prohledávání, pravděpodobnostní algoritmus a jeho derandomizace.

(3) Nechť graf G má maximální stupeň Δ, kde Δ je konstanta. Hladový algoritmus ho obarví Δ+1 barvami, ale není zjevné, jak ho paralelizovat. Navrhněte rychlý paralelní pravděpodobnostní algoritmus, který najde korektní obarvení $\Delta + 1$ barvami.

(4) Dokažte, že hodnost Edmondsovy matice bipartitního grafu je rovna velikosti největšího párování.

Edmondsova matice bipartitního grafu $G = (U, V, E)$ na vrcholech $U = \{u_1, \ldots, u_n\}$ a $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ je matice polynomů B rozměru $n \times n$ definována předpisem

$$B_{ij} = \begin{cases} x_{ij} & \text{pro } (u_i, v_j) \in E \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

(4*) Dokažte, že hodnost Tutteho matice obecného grafu je rovna dvojnásobku velikosti největšího párování. Pokud se to nepodaří, dokažte aspoň verzi pro perfektní párování.

Tutteho matice grafu $G = (V, E)$ na n vrcholech $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ je matice polynomů B rozměru $n \times n$ definována předpisem

$$B_{ij} = \begin{cases} x_{ij} & \text{pro } (v_i, v_j) \in E \text{ a } i < j \\ -x_{ij} & \text{pro } (v_i, v_j) \in E \text{ a } i > j \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Nápověda: Pozor, ne každá čtvercová podmatice Tutteho matice odpovídá podgrafu G. Pro antisymetrickou matici A a r-prvkové množiny indexů S a T, kde r je hodnost A, platí rovnost

$$det(A^{SS}) \cdot det(A^{TT}) = det(A^{ST}) \cdot det(A^{TS}),$$

kde A^{ST} je čtvercová podmatice daná řádky S a sloupci T. (Proč?)