Aproximační a pravděpodobnostní algoritmy
NDMI084 – ZS 2013 – Jiří Sgall

Domácí úkol 3 – 15. prosince

Termín: 6. ledna 2014

Všechny listy podepište buď jménem nebo přezdívkou.
Pokud jste to neudělali u prvních úkolů, zvolte si přezdívku (pro zveřejnění výsledků na webu) a řešení podepište alespoň na jednom listě jak jménem tak přezdívkou.
Všechny úlohy jsou za 2 body, pro zápočet je potřeba polovina bodů.
Úloha s hvězdičkou je bonusová navíc, nepočítá se do základu pro zápočet.

(1) Nechť $GF(p)$ je konečné těleso počítání modulo prvočíslo $p > n$. Pro $a \in GF(p)$ definujme funkci $h_a : GF(p) \to \{0, \ldots, n-1\}$ předpisem $h_a(x) = (ax \bmod p) \bmod n$. Nechť $H = \{h_a \mid a \in GF(p) \setminus \{0\}\}$. Dokažte, že H splňuje pro všechna $x, y \in GF(p)$, $x \neq y$, že $Pr_{h \in H}[h(x) = h(y)] \leq 2/n$; tedy H je v určitém smyslu téměř 2-univerzální (pravděpodobnost je dvakrát větší).

(2) Nechť graf G má maximální stupeň Δ. Hladový algoritmus ho obarví $\Delta + 1$ barvami, ale není zjevné, jak ho paralelizovat. Navrhněte rychlý paralelní (pravděpodobnostní či deterministický) algoritmus, který najde korektní obarvení $\Delta + 1$ barvami.

(3) Navrhněte efektivní pravděpodobnostní algoritmus pro počítání hodnosti matice polynomů (jako je Edmondsova nebo Tutteho matice). Dokažte jeho správnost a odhadněte jeho složitost (algoritmus pro determinant můžete použít bez analýzy).

(4) Dokažte, že hodnost Edmondsovy matice bipartitního grafu je rovna velikosti největšího párování.

Edmondsova matice bipartitního grafu $G = (U, V, E)$ na vrcholech $U = \{u_1, \ldots, u_n\}$ a $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ je matice polynomů B rozměru $n \times n$ definována předpisem

$$B_{ij} = \begin{cases} x_{ij} & \text{pro } (u_i, v_j) \in E \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

(4*) Dokažte, že hodnost Tutteho matice obecného grafu je rovna dvojnásobku velikosti největšího párování. Pokud se to nepodaří, dokažte aspoň verzi pro perfektní párování.

Tutteho matice grafu $G = (V, E)$ na n vrcholech $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ je matice polynomů B rozměru $n \times n$ definována předpisem

$$B_{ij} = \begin{cases} x_{ij} & \text{pro } (v_i, v_j) \in E \text{ a } i < j \\ -x_{ij} & \text{pro } (v_i, v_j) \in E \text{ a } i > j \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Nápověda:
Pozor, ne každá čtvercová podmatice Tutteho matice odpovídá podgrafu G. Pro antisymetrickou matici A a r-prvkové množiny indexů S a T platí rovnost

$$det(A^{SS}) \cdot det(A^{TT}) = det(A^{ST}) \cdot det(A^{TS}),$$

kde A^{ST} je čtvercová podmatice daná řádky S a sloupci T. (Proč?)