Úvod do aproximačních a pravděpodobnostních algoritmů
NDMI084 – ZS 2014 – Jiří Sgall

Domácí úkol 2 – 11. listopadu

Termín: 23. listopadu
Cvičení: 25. listopadu

Pokud jste to neudělali u prvních úkolů, zvolte si přezdívku (pro zveřejnění výsledků na webu) a řešení podepište alespoň na jednom listě jak jménem tak přezdívkou. Všechny listy podepište buď jménem nebo přezdívkou.
Všechny úlohy jsou za 2 body, pro zápočet je potřeba polovina bodů.

(1) Uvažujte rozvrhování v situaci, kdy jsou závislosti mezi úlohami. Přesněji, na úlohách je definovaný acyklický graf a úlohu je možné zahájit až ve chvíli, kdy jsou všechny úlohy jí předcházejíci v grafu dokončeny. Formulujte hladový algoritmus a dokažte, že je 2-aproximační (a ne lepší). V úkolu jde pouze o poměr platný pro každé m, závislost na m je opět $2 - 1/m$.

(2) V problému Steinerova stromu je dán souvislý neorientovaný graf $G = (V, E)$, ceny hran $c : E \to \mathbf{R}^+$ a množina terminálů $S \subseteq V$. Přípustným řešením je podmnožina hran E' taková, že graf (V, E') má všechny terminály v jedné komponentě. Cílem je minimalizovat celkovou cenu vybraných hran E'.

Najděte 2-aproximační algoritmus.

Nápověda: I když nepředpokládáme trojúhelníkovou nerovnost, vyřešit nejprve metrický případ může být užitečné. Inspirujte se algoritmy pro problém obchodního cestujícího.

(3) Na přednášce jsme ukazovali 2-aproximační algoritmus pro (vážené) vrcholové pokrytí založený na lineárním programování. (Omezení byla $x_u + x_v \geq 1$ pro každou hranu uv, $x_u \geq 0$, minimalizuje se $\sum x_u$.) Dokažte, že tento lineární program má poloceločíselné optimum, tj. optimum takové, že $x_u \in \{0; 1/2; 1\}$ pro všechny vrcholy u.

(4) Nechť K je konečné těleso. Pravděpodobnostní prostor bude $K \times K$ s uniformním rozdělením, tj. množina dvojic čísel (a, b).

Uvažme pro každé $x \in K$ náhodnou proměnnou $F_x \in K$ definovanou jako $F_x(a, b) = ax + b$. (Tj. v elementárním jevu (a, b) hodnota odpovídá hodnotě příslušné lineární funkce.)

(a) Rozhodněte a dokažte, pro které dvojice x a y jsou náhodné proměnné F_x a F_y nezávislé.

(b) Rozhodněte a dokažte, pro které trojice x, y a z jsou náhodné proměnné F_x, F_y a F_z nezávislé.