Aproximační a pravděpodobnostní algoritmy
NDMI084 – ZS 2013 – Jiří Sgall

Domácí úkol 2 – 14. listopadu

Termín: 25. listopadu

Pokud jste to neudělali u prvních úkolů, zvolte si přezdívku (pro zveřejnění výsledků na webu) a řešení podepište alespoň na jednom listě jak jménem tak přezdívkou. Všechny listy podepište buď jménem nebo přezdívkou.
Všechny úlohy jsou za 2 body, pro zápočet je potřeba polovina bodů.
Úloha s hvězdičkou je bonusová navíc, nepočítá se do základu pro zápočet.

(1) Uvažujte rozvrhování v situaci, kdy k z m strojů má dvojnásobnou rychlost. Tj. úloha p_j trvá na pomalém stroji p_j a na rychlém $p_j/2$.

(a) Hladový algoritmus rozvrhne úlohu na stroji, kde skončí nejdříve. Najděte aproximační poměr hladového algoritmu pokud k a m je součástí vstupu. Tj. není nutné zjistit závislost na k a m, stačí optimální konstanta. (Pro identické stroje by odpověď byla 2.) Součástí řešení by měl být i příklad ukazující, že konstanta je optimální.

(b) Navrhněte 3-aproximační nebo lepší algoritmus.

(1*) Analyzujte hladový algoritmus pro případ, že $k = m/2$. Tedy rychlých a pomalých strojů je stejně. Stejně jako v předchozí úloze nás nezajímá závislost na m.

(2) V problému MAX-k-CUT je dán neorientovaný graf $G = (V, E)$. Výstup je rozklad V na k množin. Cíl je maximalizovat počet hran s vrcholy v různých množinách rozkladu. Najděte $(1 - 1/k)$-aproximační algoritmus, nejlépe detrministický.

Nápověda: Možností je více, hladový algoritmus, lokální prohledávání, derandomizace pravděpodobnostního algoritmu.

(3) Na přednášce jsme ukazovali 2-aproximační algoritmus pro (vážené) vrcholové pokrytí založený na lineárním programování. (Omezení byla $x_u + x_v \geq 1$ pro každou hranu uv, $x_u \geq 0$, minimalizuje se $\sum x_u$.) Dokažte, že tento lineární program má poloceločíselné optimum, tj. optimum takové, že $x_u \in \{0; 1/2; 1\}$ pro všechny vrcholy u.

(4) Nechť K je konečné těleso. Pravděpodobnostní prostor bude $K \times K$ s uniformním rozdělením, tj. množina dvojic čísel (a, b).

Uvažme pro každé $x \in K$ náhodnou proměnnou $F_x \in K$ definovanou jako $F_x(a, b) = ax+b$. (Tj. v elementárním jevu (a, b) hodnota odpovídá hodnotě příslušné lineární funkce.)

(a) Rozhodněte a dokažte, pro které dvojice x a y jsou náhodné proměnné F_x a F_y nezávislé.

(b) Rozhodněte a dokažte, pro které trojice x, y a z jsou náhodné proměnné F_x, F_y a F_z nezávislé.