NDMI018 – Aproximační a online algoritmy
LS 2012 – Jiří Sgall

Domácí úkol 4 – 4. května

Termín: 13. května nebo na přednášce 14. května

Všechny úlohy jsou za 2 body, pro zápočet je potřeba polovina bodů.
Úloha s hvězdičkou je bonusová navíc, nepočítá se do základu pro zápočet.

(1) Najděte příklad, který ukazuje, že randomizovaný algoritmus MARK pro paging není H_k-kompetitivní. Stačí uvažovat případ $k = 2$ a $n = 4$, ale je potřeba vytvořit libovolně dlouhou posloupnost, aby důkaz fungoval pro libovolnou aditivní konstantu v definici kompetitivního poměru.

Bonus: Dokažte, že MARK není $(\alpha H_k + c)$-kompetitivní pro žádnou konstantu c nezávislou na k, a to buď (i) pro nějaké $\alpha > 1$, anebo (ii) dokonce pro žádné $\alpha < 2$. Pro toto je potřeba uvažovat velké k.

(2) Najděte algoritmus počítající optimální řešení pro k-server problém v čase polynomiálním v k a n (n je délka vstupu). Zkuste použít toky v sítích.

(3) Problém online bipartitního párování vypadá takto. Je dána množina vrcholů V v jedné partitě. Vrcholy z druhé partity přicházejí po jednom a vždy jsou známy všechny hrany spojující nový vrchol s vrcholy V. Algoritmus smí jednu z těchto nových hran přidat do párování. (Samozřejmě, jen pokud druhý vrchol není spárovaný.) Dokažte, že hladový algoritmus je 2-kompetitivní a že neexistuje lepší deterministický algoritmus.

Bonus: Přirozený pravděpodobnostní algoritmus je vybrat pro každý nový vrchol náhodně hranu ze všech možných. Dokažte, že (překvapivě) tento algoritmus není lepší než 2-kompetitivní.

(4) Problém hledání p-center je definován takto. Je dána konečná metrika. Výstup je p bodů, kterým říkáme centra. Vzdáleností bodů od center rozumíme vzdálenost k nejbližšímu centru. Cílem je minimalizovat maximální vzdálenost nějakého bodu metriky od center.

Uvažme hladový algoritmus. První centrum vybereme libovolně. Každé další tak, že vezmeme bod, který je nejvzdálenější od dosavadních center.

Ukažte, že hladový algoritmus je 2-aproximační. (Nápověda: Použijte fakt, že pokud bod x je ve vzdálenosti OPT od centra c, tak všechny body pokryté centrem c jsou od něj ve vzdálenosti nejvýše $2 \cdot OPT$.)

(5*) Zkuste PTAS pro rozvrhování (s cílem minimalizovat délku rozvrhu) rozšířit na případ počítačů s rozdílnými rychlostmi. Tj. vstup jsou délky úloh $p_j, j = 1, \dots n$ a rychlosti počítačů $s_i, i = 1, \dots m$. Zpracovat úlohu j na počítači i trvá čas p_j/s_i. Neboli délka rozvrhu je maximum ze $\sum_{j \in M_i} p_j/s_i$, přes všechna i, kde M_i je soubor úloh přiřazených na počítač i. [Problém je, že různé rychlosti komplikují zaokrouhlování: Co je zanedbatelná změna pro jeden počítač, může být veliká změna pro jiný počítač.]