NDMI018 – Aproximační a online algoritmy
LS 2010 – Jiří Sgall

Domácí úkol 2 – 28. března 2010

Termín: 6. dubna 2010 (nebo na přednášce 7. dubna)

(1) Na první přednášce jsme ukazovali 2-aproximační algoritmus pro (vážené)vrcholové pokrytí založený na lineárním programování. (Omezení byla $x_u + x_v \geq 1$ pro každou hranu uv.) Dokažte, že tento lineární program má poloceločíselné optimum, tj. optimum takové, že $x_u \in \{0; 1/2; 1\}$ pro všechny vrcholy u.

(2) Uvažte analogický lineární program pro k-uniformní hypergrafy. (Tj. každá hrana má právě k vrcholů.) Analogické tvrzení by říkalo, že existuje optimální řešení příslušného LP takové, že každá proměnná má hodnotu i/k pro nějaké celočíselné i. Najděte příklad hypergrafu, pro který takové tvrzení neplatí!

(3) Vraťme se k problému MAX-SAT. Předpokládejme, že ve vstupní formuli jsou všechny literály v klauzulích délky 1 pozitivní. (Na přednášce jsme ukazovali, jak toho dosáhnout.) Uvažme algoritmus, který náhodně a nezávisle nastaví každou proměnnou na 1 s pravděpodobností p. Najděte co nejlepší hodnotu p a aproximační poměr tohoto algoritmu.

(4) Problém hledání p-center je definován takto. Je dána konečná metrika. Výstup je p bodů, kterým říkáme centra. Vzdáleností bodů od center rozumíme vzdálenost k nejbližšímu centru. Cílem je minimalizovat maximální vzdálenost nějakého bodu metriky od center.

Uvažme hladový algoritmus. První centrum vybereme libovolně. Každé další tak, že vezmeme bod, který je nejvzdálenější od dosavadních center.

Ukažte, že hladový algoritmus je 2-aproximační. (Nápověda: Použijte fakt, že pokud bod x je ve vzdálenosti OPT od centra c, tak všechny body pokryté centrem c jsou od něj ve vzdálenosti nejvýše $2 \cdot OPT$.)

Před cvičeními se zkuste zamyslet nad asymetrickou variantou, kde vzdálenosti splňují trojúhelníkovou nerovnost ale ne symetrii (jako ASTP).

(5* – bonus) Zkuste PTAS pro rozvrhování (s cílem minimalizovat délku rozvrhu) rozšířit na případ počítačů s rozdílnými rychlostmi. Tj. vstup jsou délky úloh $p_j, j = 1, \ldots n$ a rychlosti počítačů $s_i, i = 1, \ldots m$. Zpracovat úlohu j na počítači i trvá čas p_j/s_i. Neboli délka rozvrhu je maximum ze $\sum_{j \in M_i} p_j/s_i$, přes všechna i, kde M_i je soubor úloh přiřazených na počítač i.