PRAVDĚPODOBNOSTNÍ METODA
ZS 2009/10 soubor úloh č. 6

(**dle dohody** nápověda, **kdykoli** řešení)

Zápočet: ≥ 42 b, zkouška: ≥ 110 b. Za příklady dodané před návodem je dvojnásobek, po předvedení řešení dostanete jen 2/3 bodů.

1. Ukažte, že když $p \in (0,1)$ je libovolná konstanta, tak $G_{n,p}$ je skoro jistě souvislý. Pro jak malou funkci $p(n)$ dokážete dokázat, že $G_{n,p(n)}$ je souvislý skoro jistě? (Počet bodů závisí na tom, jak malé bude vaše $p(n)$.) **2**

2. Uvažte následující algoritmus, jehož vstupem je graf s $n \geq 2$ vrcholy (a případně s násobnými hranami). Pokud $n = 2$, algoritmus vypíše počet hran mezi těmi dvěma vrcholy, jinak vybere náhodnou hranu a zkontrahuje ji (přičemž zahodí všechny smyčky, ale zachová všechny násobné hrany). Ukažte, že s pravděpodobností alespoň n^{-2} algoritmus vypíše velikost nejmenšího hranového řezu grafu G. **4**

3. Ukažte, že pro nekonečně mnoho hodnot n existuje bipartitní graf s n-prvkovými částmi L, R tak, že každý vrchol z L má stupeň ≤ 18 a každá množina $S \subseteq L$ s nejvýše $n/3$ vrcholy má alespoň $2|S|$ sousedů v R. (Takový graf se nazývá $(n, 18, 1/3, 2)$-koncentrátor.) **5**

4. Označme $N^*_G(H)$ počet prostých zobrazení $\phi : V(H) \to V(G)$ zachovávajících hrany i nehrany, neboli počet uspořádaných indukovaných kopií H v G.

   Ukažte, že pro nekonečně mnoho hodnot n existuje graf G s n vrcholy takový, že $N^*_G(H) = n^3/8 + o(n^3)$ pro všechny grafy H s 3 vrcholy, ale $N^*_G(C_4) \neq n^4/64 + o(n^4)$. Jinými slovy, G se chová jako náhodný graf pokud jde o třívrcholové podgrafy, ale ne pokud zkoumáme počet indukovaných čtyřcyklů. **6**

5. Užitím náhodného grafu $G_{n,p}$ ukažte, že pro všechna dostatečně velká t existuje graf s průměrným stupněm $\geq ct\sqrt{\log t}$ a bez minoru K_t ($c > 0$ je vhodná konstanta). (Poznámka, pokud má graf průměrný stupeň $\geq Ct\sqrt{\log t}$ pro dostatečně velké C, pak už minor K_t obsahuje.) **7**

6. Ukažte, že pro dostatečně velké d existuje množina $S \subseteq \mathbb{R}^d$ s $> 2d - 1$ body tak, že všechny trojúhelníky s vrcholy v bodech S jsou ostroúhlé (všechny úhly jsou menší než $90°$). **3**

7. Ukažte, že existuje konstanta $C > 0$ taková, že pro každé $n \geq 2$ existuje graf s n vrcholy a minimálním stupněm $\geq n/2$ v němž každá dominující množina má alespoň $C \log n$ vrcholů. (Tím ukážete, že odhad ze druhé série je asymptoticky nejlepší možný, alespoň pro grafy kde minimální stupeň je lineární.) **3**

8. Mějme vrcholy hypergrafu obarvené červeně a modře. Hranu nazveme načervenalou, pokud aspoň polovina jejích vrcholů, avšak ne všechny její vrcholy, jsou obarveny červeně.

   - Dokažte, že pro libovolné $\alpha < 5/4$ každý n-uniformní hypergraf s nejvýše α^n hranami (kde n je dostatečně velké) má obarvení, kde všechny hrany jsou načervenalé. **3**

   - Dokažte, že pro $\beta > 5/4$ a n dostatečně velké existují n-uniformní hypegrafy, kde všechna obarvení mají hranu, která není načervenalá. **5**

9. Pro každý vrchol v grafu $G = (V, E)$, je dán seznam barev L_v. *Seznamové barvení* je zobrazení $b\colon V \to \bigcup_{v \in V} L_v$ takové, že $b(v) \in L_v$ pro všechna v a sousední vrcholy mají různé barvy. Graf je *k-vybíravý* pokud existuje seznamové barvení pro každou volbu seznamů L_v, splňujících $|L_v| = k$ pro všechna v.

   Buď $G = (A \cup B, E)$ bipartitní graf, přičemž $|A| \geq |B|$, a každý vrchol má stupeň alespoň d. Každému vrchlu v přiřadíme coby L_v náhodnou k-prvkovou podmnožinu $[k^4]$. Ukažte, že je-li $k \geq k_0$ (pro vhodné k_0) a d dostatečně velké vzhledem ke k (jak velké?) pak, s kladnou pravděpodobností neexistuje žádné seznamové obarvení. **7**