

# PRAVDĚPODOBNOSTNÍ METODA

## ZS 2009/10 soubor úloh č. 5

(5.1.2010 nápověda, 12.1.2010 řešení)

Zápočet:  $\geq 42$  b, zkouška:  $\geq 110$  b. Za příklady dodané před návodem je dvojnásobek, po předvedení řešení dostanete jen 2/3 bodů.

1. Mějme algoritmus, který odpovídá ano/ne, a dává správnou odpověď s pravděpodobností alespoň  $\frac{1}{2} + 1/p(n)$ , kde  $p$  je nějaký polynom a  $n$  velikost vstupu. Ukažte, že polynomiálním počtem opakování lze zařídit, že pravděpodobnost chyby je nejvýše  $1/2^n$ . **3**

2. Ukažte, že skoro jistě graf  $G_{n,p}$  má

• maximální stupeň  $\leq n(1/2 + o(1))$  a minimální stupeň  $\geq n(1/2 - o(1))$  **2**

• maximální stupeň  $\geq n/2 + \sqrt{n}$  a minimální stupeň  $\leq n/2 - \sqrt{n}$  a **3**

• alespoň  $n^{1/3}$  vrcholů stupně přesně  $\lfloor n/2 \rfloor$ . **3**

3. Pro množinu  $T$  vrcholů grafu  $G$  označme  $c(T)$  počet hran, které opouštějí  $T$ , tj. spojují vrchol z  $T$  s vrcholem mimo  $T$ . Dokažte, že pro dostatečně velká  $n$  existuje graf  $G$  s  $2n$  vrcholy, v němž pro všechny množiny  $T$  velikosti  $n$  platí  $|c(T) - n^2/2| \leq f(n)$ , přičemž  $f(n) = o(n^2)$  je vhodná funkce. Pokuste se najít co nejmenší  $f(n)$  (za hodně malé  $f(n)$  bude hodně mnoho bodů ;-)). **3**

4. Buď  $X$  množina velikosti  $2n$ .

(a) Buď  $B$  uniformně náhodně vybraná podmnožina  $X$ . Jaká je pravděpodobnost, že  $|B| = n$ ? Jaká je pravděpodobnost, že  $n - a \leq |B| \leq n + a$ ? **1**

(b) Najděte konstantu  $d > 0$  (nezávislou na  $n$ ) tak, aby pro libovolné  $A_1, \dots, A_n \subseteq X$  existovala množina  $C \subseteq X$  velikosti  $n$ , pro kterou

$$\left| |A_i \cap C| - |A_i|/2 \right| \leq d\sqrt{n \ln n}$$

platí pro všechna  $i$ . **3**

Jednodušší varianta (za 2 body): nepotřebujeme množinu velikosti přesně  $n$ , stačí nám, aby platilo  $||C| - n| \leq d\sqrt{n \ln n}$ .

5.  $n^2$  lidí chce vybrat  $\leq n$ -členný výbor. Mezi  $n^2$  lidmi je  $n^2/10$  zloduchů, kteří chtějí získat vliv ve výboru. Dobroduši nevědí, kdo jsou zloduší.

Vybírat budou následovně: Každý řekne číslo  $1, \dots, n$ , a lidé, kteří řekli nejméně časté číslo budou zvoleni. Dobroduši budou vybírat číslo náhodně nezávisle, zloduší udělají co budou chtít (spec. mohou spolupracovat a předvídat, co zvolí dobroduši). Ukažte, že je velmi nepravděpodobné, že by ve výboru bylo více než  $1/5$  zloduchů. **4**