PRAVDĚPODOBNOSTNÍ METODA
ZS 2009/10 soubor úloh č. 4

(**8.12.** nápověda, **15.12.** řešení)

Zápočet: ≥ 42 b, zkouška: ≥ 110 b. Za příklady dodané před návodem je dvojnásobek, po předvedení řešení dostanete jen 2/3 bodů.

Za druhou část příkladu 5 odevzdanou před nápovědou dostanete trojnásobek bodů.

1. Máme n-uniformní hypergraf s nejvýše $4^{n-1}/3^n$ hranami. Ukažte, že jeho vrcholy lze obarvit čtyřmi barvami tak, aby každá hrana obsahovala alespoň jeden vrchol každé barvy. **2**

2. Náhodná procházka po přirozených číslech začíná na 1 a pokračuje takto:
   - z 1 jdeme vždy na 2
   - z $i > 1$ jdeme na $i - 1$ nebo na $i + 1$, obojí s pravděpodobností 1/2.

   Jaká je střední hodnota počtu kroků, po kterých dosáhneme n? **3**

3. Nechť $p \in (0, 1)$ je konstanta. Pak v náhodném grafu $G_{n,p}$ s pravděpodobností jdoucí k jedné platí, že
   (a) každé dva vrcholy mají společného souseda. **2**
   (b) "každé dva trojúhelníky jsou spojeny posloupností trojúhelníků": pro každé vrcholy x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3, pokud x_ix_j i y_iy_j jsou hrany pro všechna $1 \leq i < j \leq 3$, pak existují $x_4, x_5, \ldots, x_k$ tak, že $x_k = y_3$, $x_{k-1} = y_2$, $x_{k-2} = y_1$ a x_ix_j je hrana kdykoli $1 \leq i < j \leq k$ a $j - i \leq 2$. **3**

4. Van der Waerdenovo číslo $W(k, r)$ je nejmenší N takové, že pro každé obarvení čísel $1, \ldots, N$ pomocí r barev existuje jednobarevná k-prvková aritmetická posloupnost. Dokažte, že $W(k, 2) > c\, 2^k/k$ pro vhodnou konstantu $c > 0$. **3**

5. Dokažte, že
   - $R(k, k) > \frac{\sqrt{2}}{e}(1 + o(1))\, k\, 2^{k/2}$ **3**
   - $R(k, 3) > c\frac{k^2}{\log^2 k}$ **4**

6. Graf G nazveme *k-emulzivní*, pokud existuje zobrazení $f\colon E(G) \to [k]$, takové, že pro každé zobrazení $g\colon V(G) \to [k]$ existuje hrana $\{u, v\}$, pro niž $g(u) = g(v) = f(\{u, v\})$.
   - Dokažte, že úplný graf K_n je k-emulzivní, pokud $n = 100k^2 \log k$ (a případně k je velké). **4**
   - Ukažte, že jestliže G je k-emulzivní, tak má vrchol stupně alespoň $\frac{1}{100}k^2$. **3**