PRAVDĚPODOBNOSTNÍ METODA
ZS 2009/10 soubor úloh č. 2

(**3.11.** nápověda, **10.11.** řešení)

Zápočet: ≥ 42 b, zkouška: ≥ 110 b. Za příklady dodané před návodem je dvojnásobek, po předvedení řešení dostanete jen 2/3 bodů.

1. Ukažte, že pro $n > m(\ln m + 5)$ je náhodné zobrazení z $[n]$ do $[m]$ surjektivní s pravděpodobností alespoň 0.99. **2**

2. (varianty Bollobásovy věty) Buďte A_i, B_i ($i = 1, \ldots, m$) libovolné množiny takové, že $A_i \cap B_i$ je prázdná, zatímco pro libovolná $i \neq j$ je jedna z množin $A_i \cap B_j$ a $A_j \cap B_i$ neprázdná. Buď dále $p \in \langle 0, 1 \rangle$. Pak
$$\sum_{i=1}^{m} p^{|A_i|}(1-p)^{|B_i|} \leq 1\,.$$
2

   Pokud navíc $|A_i| = a$ a $|B_i| = b$ pro všechna i, tak $m \leq \frac{(a+b)^{a+b}}{a^a b^b}$. **1**

3. Uvažme náhodné zobrazení $f : [n] \to [m]$.

   (a) Ukažte, že je-li $n < c_1\sqrt{m}$, je f prosté s pravděpodobností ≥ 0.99.

   (b) Ukažte, že je-li $n > c_2\sqrt{m}$, je f prosté s pravděpodobností ≤ 0.01.

   (Přitom c_1, c_2 jsou vhodné konstanty.) **3**

   Zamyslete se, co to říká o "narozeninovém paradoxu".

4. Buď G graf s n vrcholy a minimálním stupněm δ. Ukažte, že G má dominující množinu velikosti $O(n \log(\delta+1)/(\delta+1))$. (Množina vrcholů grafu je dominující množina, pokud každý vrchol grafu je buďto jejím prvkem, nebo sousedem jejího prvku.) **3**

5. Ukažte, že Ramseyovo číslo $R(4,t)$ splňuje
$$R(4,t) \geq \Omega((t/\ln t)^2)\,.$$
3

6. Buď G graf s n vrcholy a m hranami. Označme $\alpha(G)$ velikost maximální nezávislé množiny v G, $\Delta(G)$ maximální stupeň v G a $d(G)$ průměrný stupeň v G (tj. $d(G) = 2m/n$). Pak platí

   (a) $\alpha(G) \geq \frac{n}{\Delta(G)+1}$ **1**

   (b) $\alpha(G) \geq \sum_{v \in V(G)} \frac{1}{\deg v + 1}$ **3**

   (c) $\alpha(G) \geq \frac{n}{d(G)+1}$ **1**