3. domácí úlohy - Kolmogorovská složitost

do 8. ledna 2014

Úloha 1. Nechť x a k jsou takové, že $C(x) = k$. Určete a zdůvodněte, kolik je $C(x^k)$, kde x^k je spojení k kopií x.

Úloha 2. Nechť x délky n je takové, že $C(x) \geq n - O(1)$.

a) Ukažte, že $C(y), C(z) \geq n/2 - O(1)$, když $x = yz$ a $|y| = |z|$.

b) Ukažte, že $C(y) \geq n/2 - O(1)$ a $C(z) \geq 2n/3 - O(1)$, když $x = yz$ a $2|y| = |z|$.

c) Ukažte, že pokud $x = x_1 x_2 \cdots x_{\log n}$, kde $|x_i| = n/\log n$, pak pro všechna i, $C(x_i) \geq n/\log n - O(1)$.

Úloha 3. Uvažujme náhodné rovnoměrné rozdělení X na řetízkách délky n. Jaká je očekávaná hodnota $E[C(X)]$?

Úloha 4. Nechť a, b, c jsou binární řetízky. Ukažte, že

$$2C(a,b,c) \leq C(a,b) + C(b,c) + C(a,c).$$

Úloha 5. Nechť x sudé délky n je takové, že $C(x) \geq n - O(1)$. Ukažte, že existují $u, v, w \in \{0,1\}^{n/2}$ takové, že $C(u), C(v), C(w) \geq n/2 - O(1)$, pro libovolné $y, z \in \{u, v, w\}$, kde $y \neq z$, $C(y|z) \geq n/2 - O(1)$ a navíc též $C(x|y,z) = O(1)$.